

ISSN 1810-1909

Вестник

ЧУВАШСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 2016

Технические науки

Научный журнал

Основан в марте 1995 г.

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Главный редактор

А.Ю. Александров, кандидат экономических наук, доцент (Чебоксары, Россия)

Заместитель главного редактора

Г.А. Белов, доктор технических наук, профессор (Чебоксары, Россия)

Члены редакционной коллегии

А.А. Афанасьев, доктор технических наук, профессор (Чебоксары, Россия)

В.П. Афанасьев, доктор технических наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

В.В. Афанасьев, доктор технических наук, доцент (Чебоксары, Россия)

А.В. Булычев, доктор технических наук, профессор (Чебоксары, Россия)

Н.П. Вашкевич, доктор технических наук, профессор (Пенза, Россия)

Н.А. Галанина, доктор технических наук, доцент (Чебоксары, Россия)

Л.С. Зимин, доктор технических наук, профессор (Самара, Россия)

Ю.К. Евдокимов, доктор технических наук, профессор (Казань, Россия)

А.Г. Коробейников, доктор технических наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

А.Б. Кувалдин, доктор технических наук, профессор (Москва, Россия)

С.Л. Кужеков, доктор технических наук, профессор (Новочеркасск, Россия)

А.Л. Куликов, доктор технических наук (Нижний Новгород, Россия)

Ю.Я. Лямец, доктор технических наук, профессор (Чебоксары, Россия)

В.И. Мелешин, доктор технических наук, профессор (Москва, Россия)

Ю.М. Миронов, доктор технических наук, доцент (Чебоксары, Россия)

А.В. Мокеев, доктор технических наук, доцент (Архангельск, Россия)

В.А. Песошин, доктор технических наук, профессор (Казань, Россия)

А.А. Потапов, доктор физико-математических наук, профессор (Москва, Россия)

В.В. Сагарадзе, доктор технических наук, член-корреспондент РАН (Екатеринбург, Россия)

И.Г. Сидоркина, доктор технических наук, профессор (Йошкар-Ола, Россия)

А.И. Федотов, доктор технических наук, профессор (Казань, Россия)

Л.М. Шарнин, доктор технических наук, профессор (Казань, Россия)

Ответственный секретарь

Н.И. Завгородняя

Журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук.

Адрес редакции: 428015, Чебоксары, Московский пр., 15,
тел. (8352) 45-20-96, 58-33-63 (доб. 2030)
e-mail: vestnik@chuvsu.ru
<http://www.chuvsu.ru/university/vestnik.htm>

ISSN 1810-1909

Vestnik

CHUVASHSKOGO UNIVERSITETA

№ 1 2016

Technical Sciences

Scientific Journal

Since March, 1995

Founder:
Federal State Educational Budgetary Institution
of Higher Professional Education
the Ulyanov Chuvash State University

Editor-in-Chief

A.Yu. Aleksandrov, Candidate of Economics, Associate Professor (Cheboksary, Russia)

Deputy Editor-in-Chief

G.A. Belov, Doctor of Technical Sciences, Professor (Cheboksary, Russia)

Editorial Board

A.A. Afanasyev, Doctor of Technical Sciences, Professor (Cheboksary, Russia)
V.P. Afanasyev, Doctor of Technical Sciences, Professor (St.-Petersburg, Russia)
V.V. Afanasyev, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor (Cheboksary, Russia)
A.V. Bulychev, Doctor of Technical Sciences, Professor (Cheboksary, Russia)
N.P. Vashkevich, Doctor of Technical Sciences, Professor (Penza, Russia)
N.A. Galanina, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor (Cheboksary, Russia)
L.S. Zimin, Doctor of Technical Sciences, Professor (Samara, Russia)
Yu.K. Evdokimov, Doctor of Technical Sciences, Professor (Kazan, Russia)
A.G. Korobeinikov, Doctor of Technical Sciences, Professor (St. Petersburg, Russia)
A.B. Kuvaldin, Doctor of Technical Sciences, Professor (Moscow, Russia)
S.L. Kuzhikov, Doctor of Technical Sciences, Professor (Novocherkassk, Russia)
A.L. Kulikov, Doctor of Technical Sciences (Nizhny Novgorod, Russia)
Yu.Ya. Lyamets, Doctor of Technical Sciences, Professor (Cheboksary, Russia)
V.I. Meleshin, Doctor of Technical Sciences, Professor (Moscow, Russia)
Yu.M. Mironov, Doctor of Technical Sciences, Professor (Cheboksary, Russia)
A.V. Mokeev, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor (Arkhangelsk, Russia)
V.A. Pesoshin, Doctor of Technical Sciences, Professor (Kazan, Russia)
A.A. Potapov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor (Moscow, Russia)
V.V. Sagaradze, Doctor of Technical Sciences, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences (Ekaterinburg, Russia)
I.G. Sidorkina, Doctor of Technical Sciences, Professor (Yoskar-Ola, Russia)
A.I. Fedotov, Doctor of Technical Sciences, Professor (Kazan, Russia)
L.M. Sharnin, Doctor of Technical Sciences, Professor (Kazan, Russia)

Executive Editor

N.I. Zavgorodnyaya

The journal is included into the List of leading peer-reviewed scientific journals and publications issued in the Russian Federation where the main scientific results of doctoral theses are to be published.

Address: 15, Moskovskiy pr., Cheboksary, Chuvash Republic, 428015, Russia
Tel. +7(8352)45-20-96, 58-33-63 (2030)
E-mail: vestnik@chuvsu.ru
<http://www.chuvsu.ru/university/vestnik.htm>

УДК 621.314.1
ББК 32.859

С.В. АБРАМОВ

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОНИЖАЮЩЕГО ИМПУЛЬСНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В РЕЖИМАХ НЕПРЕРЫВНОГО И ПРЕРЫВИСТОГО ТОКА

***Ключевые слова:** импульсный преобразователь, частотные характеристики, режимы прерывистого и непрерывного тока, дискретная модель, передаточная функция.*

Динамика импульсных преобразователей постоянного напряжения в настоящее время в большинстве случаев исследуется частотными методами, поскольку частотные характеристики сравнительно легко строятся и проверяются экспериментально. Однако методики расчета частотных характеристик импульсных преобразователей до сих пор недостаточно разработаны, особенно в режиме прерывистого тока, поскольку основываются в основном на недостаточно точных усредненных динамических моделях.

Приводятся методики расчета частотных характеристик понижающего импульсного преобразователя с одноконтурной системой управления. Для построения частотных характеристик используются выражения дискретных передаточных функций разомкнутой системы в режимах прерывистого и непрерывного тока. Правильность результатов построения и достоверность математической модели проверяется на макете, для чего анализируются частотные характеристики неизменяемой части системы.

Динамика импульсных преобразователей постоянного напряжения (ППН) в настоящее время в большинстве случаев исследуется частотными методами, поскольку частотные характеристики сравнительно легко строятся и проверяются экспериментально [9–23]. По частотным характеристикам разомкнутой системы могут быть найдены такие параметры, как запас устойчивости, точность регулирования, показатель колебательности. Однако методики расчета частотных характеристик импульсных ППН до сих пор недостаточно разработаны, особенно в режиме прерывистого тока (РПТ), поскольку основываются в основном на недостаточно точных усредненных динамических моделях [6, 7].

В статье приводятся методики расчета частотных характеристик понижающего импульсного преобразователя с одноконтурной системой управления в режимах непрерывного и прерывистого тока на основе точных дискретных динамических моделей [1, 2], а также результаты проверки полученных частотных характеристик на экспериментальном макете.

На рис. 1 показана схема понижающего импульсного преобразователя с системой управления на микросхеме UC3573, рассчитанной в работах [6, 7].

Исходные данные для проектирования экспериментального образца: выходное напряжение 5 В; номинальный ток нагрузки 2 А; минимальный выходной ток 1 А; номинальное входное напряжение 12 В; минимальное входное напряжение 9 В; максимальное входное напряжение 15 В; допустимая нестабильность выходного напряжения ± 10 мВ. Индуктивность силового дросселя $L = 40$ мкГн, в качестве конденсатора фильтра был выбран конден-

сатор $C2 = 3300$ мкФ. Емкость входного конденсатора $C1 = 220$ мкФ. Параметры фильтра цепи защиты от перегрузки по току $R6 = 875$ Ом, $C7 = 82$ пФ.

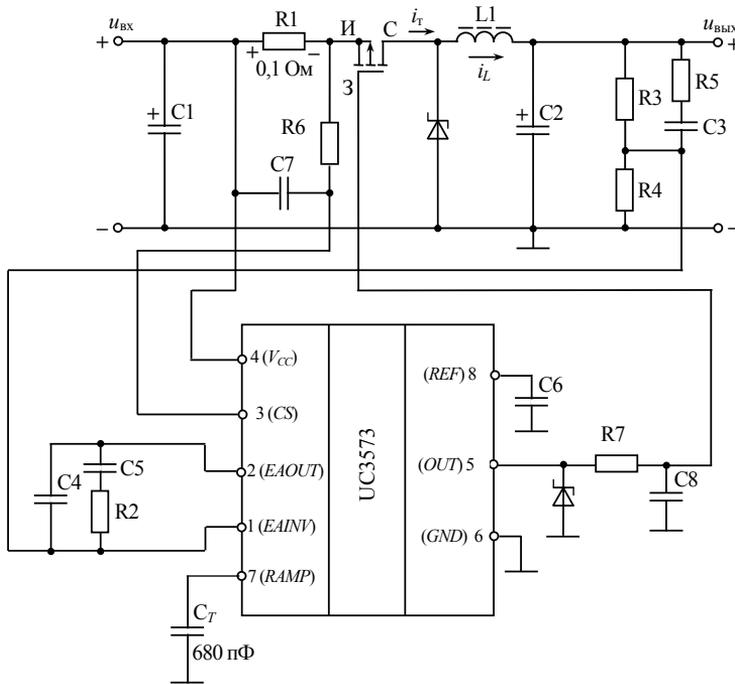


Рис. 1. Принципиальная схема понижающего импульсного преобразователя

В режиме непрерывного тока (РНТ) дискретная передаточная функция, соответствующая передаточной функции непрерывной части $W(p)$, описывается следующим выражением [4]:

$$W(z, \varepsilon) = \frac{K_{НЧ} z}{T_{\Phi}^2 T_2} \left[A_1 d_1^{\varepsilon} \frac{z \cos \varepsilon \omega_{\Phi} T - d_1 \cos(1 - \varepsilon) \omega_{\Phi} T}{z^2 - 2z d_1 \cos \omega_{\Phi} T + d_1^2} + \frac{A_2 - A_1 \alpha_{\Phi}}{\omega_{\Phi}} d_1^{\varepsilon} \frac{z \sin \varepsilon \omega_{\Phi} T + d_1 \sin(1 - \varepsilon) \omega_{\Phi} T}{z^2 - 2z d_1 \cos \omega_{\Phi} T + d_1^2} + A_3 \frac{1}{z - 1} + A_4 \frac{d_2^{\varepsilon}}{z - d_2} \right], \quad (1)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $d_1 = e^{-\alpha_{\Phi} T}$, $d_2 = e^{-T/T_2}$, A_i , $i = 1, \dots, 4$ – коэффициенты разложения, определяемые, например, методом неопределенных коэффициентов [5]:

$$A_1 = T_2 T_{\Phi}^2 \frac{\frac{\tau_1 \tau_2}{T_{\Phi}^2} - \frac{(\tau_1 + \tau_2) T_2}{T_{\Phi}^2} - (1 - 2\alpha_{\Phi} T_2)}{1 - 2\alpha_{\Phi} T_2 + \left(\frac{T_2}{T_{\Phi}} \right)^2},$$

$$A_2 = T_{\Phi}^2 \left[\frac{\tau_1 \tau_2}{T_{\Phi}^2} - 1 - (1 - 2\alpha_{\Phi} T_2) \frac{A_1}{T_2 T_{\Phi}^2} \right], \quad A_3 = T_2 T_{\Phi}^2,$$

$$A_4 = T_2 T_\phi^2 \frac{\frac{(\tau_1 + \tau_2) T_2}{T_\phi^2} - \frac{\tau_1 \tau_2}{T_\phi^2} - \left(\frac{T_2}{T_\phi}\right)^2}{1 - 2\alpha_\phi T_2 + \left(\frac{T_2}{T_\phi}\right)^2},$$

где τ_1, τ_2, T_1, T_2 – постоянные времени последовательного корректирующего устройства; T_ϕ – постоянная времени LC-фильтра.

С учетом того, что в контуре имеется запаздывающий на ε импульсный элемент, передаточная функция разомкнутой системы будет определяться выражением [8]

$$W(z, \varepsilon - \varepsilon_1) = \begin{cases} z^{-1}W(z, 1 + \varepsilon - \varepsilon_1), & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1, \\ W(z, \varepsilon - \varepsilon_1), & \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_1$ из (1) следует

$$W(z, \varepsilon - \varepsilon_1)|_{\varepsilon=\varepsilon_1} = z^{-1}W(z, 1) = \frac{K_{НЧ}}{T_\phi^2 T_2} \left[A_1 d_1 \frac{z \cos \omega_\phi T - d_1}{z^2 - 2z d_1 \cos \omega_\phi T + d_1^2} + \frac{A_2 - A_1 \alpha_\phi}{\omega_\phi} d_1 \frac{z \sin \omega_\phi T}{z^2 - 2z d_1 \cos \omega_\phi T + d_1^2} + A_3 \frac{1}{z-1} + A_4 \frac{d_2}{z-d_2} \right], \quad (2)$$

На рис. 2 приведены амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики, полученные при замене $z = e^{j\omega_{вх} T}$, где $\omega_{вх}$ – круговая частота входного сигнала.

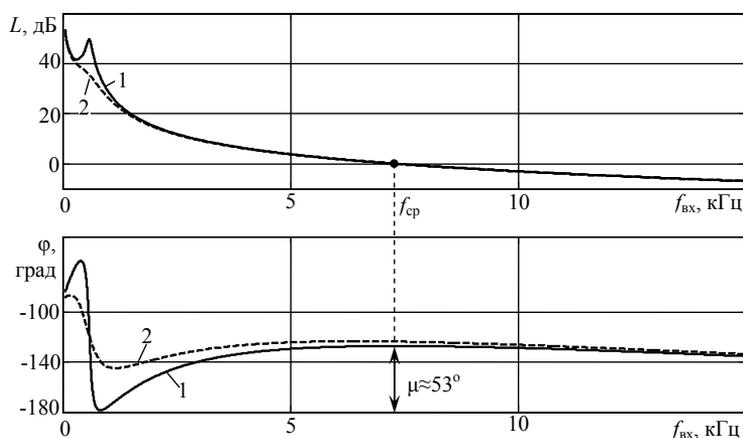


Рис. 2. АЧХ и ФЧХ разомкнутой дискретной системы в режиме непрерывного тока при $f=100$ кГц и различных значениях коэффициента демпфирования LC-фильтра $\zeta_\phi=0,1$ (1) и $\zeta_\phi=0,5$ (2)

Запас устойчивости по фазе μ определяется на частоте среза f_{cp} , как показано на рис. 2. Параметр μ характеризуется величиной фазового сдвига между линией (-180°) и значением ФЧХ. Запас устойчивости по фазе при значениях параметров синтезированной системы и $\zeta_\phi = 0,1$ равен $\mu \approx 53^\circ$. Найденные частота среза ω_{cp} и запас устойчивости по фазе μ с приемлемой для практики

точностью соответствуют значениям, полученным при синтезе по непрерывной модели [7], $\mu \approx 60^\circ$, $\omega_{cp} \approx 4 \cdot 10^4$ рад/с.

В режиме прерывистого тока LC -звено перестает вести себя как колебательное звено и превращается в апериодическое звено первого порядка [1, 2]. В этом случае дискретная передаточная функция разомкнутой системы имеет следующий вид:

$$W(z, \varepsilon_1) = \frac{K_{11}}{\alpha_1 z - \alpha_2} \cdot \left(\frac{\beta_1 z - \beta_2}{z - 1} + B_1 \frac{\beta_3 z - \beta_4}{z - d_1} + B_2 \frac{\beta_5 z - \beta_6}{z - d_2} + B_3 \frac{\beta_7 z - \beta_8}{z - d_3} \right), \quad (3)$$

где $B_i, i = 1, \dots, 3, \beta_j, j = 1, \dots, 8$ коэффициенты разложения [3]

$$B_1 = -\frac{(T_L - \tau_1)(T_L - \tau_2)}{(T_L - T_C)(T_L - T_2)}, B_2 = -\frac{(T_C - \tau_1)(T_C - \tau_2)}{(T_C - T_L)(T_C - T_2)}, B_3 = -\frac{(T_2 - \tau_1)(T_2 - \tau_2)}{(T_2 - T_L)(T_2 - T_C)},$$

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_1 d_1^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} - \frac{T}{T_C} \alpha_4 \varepsilon_1, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3 d_1^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} + \frac{T}{T_C} \alpha_4 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$

$$\beta_3 = -\alpha_4 \frac{T_L}{T_C} (1 - d_1^{\varepsilon_1}), \beta_4 = -d_1 (\alpha_3 - \alpha_2) - \alpha_4 \frac{T_L}{T_C} d_1 (1 - d_1^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}),$$

$$\beta_5 = \alpha_1 d_2 (1 - d_1^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} d_2^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}) - \alpha_4 (1 - d_2^{\varepsilon_1}),$$

$$\beta_6 = \alpha_2 d_2 - \alpha_3 d_1^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} d_2^{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \alpha_4 d_2 (1 - d_2^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}),$$

$$\beta_7 = \alpha_1 d_3 (1 - d_1^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} d_3^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}) - \alpha_4 (1 - d_3^{\varepsilon_1}) \frac{T_2}{T_C},$$

$$\beta_8 = \alpha_2 d_3 - \alpha_3 d_1^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} d_3^{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \alpha_4 d_3 (1 - d_3^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}) \frac{T_2}{T_C},$$

$$\alpha_1 = \frac{r(T_C - T_L)}{R(T_C - \tau_C)}, \alpha_2 = \alpha_1 d_2 + d_2 - d_2^{1 - \varepsilon_2} \left[1 - \frac{T_L}{T_C} (1 - d_1^{\varepsilon_2}) \right],$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 d_2 + d_2 - d_2^{1 - \varepsilon_2} + \frac{T_L}{T_C} d_1^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} (1 - d_1^{\varepsilon_2}) d_2^{1 - \varepsilon_1},$$

$$\alpha_4 = d_2^{1 - \varepsilon_1} - d_1^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} d_2^{1 - \varepsilon_2} = d_2^{1 - \varepsilon_2} (d_2^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} - d_1^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}),$$

$$d_1 = e^{-T/T_L}, d_2 = e^{-T/T_C}, d_3 = e^{-T/T_2}, \varepsilon_1 = t_1/T = \gamma, \varepsilon_2 = (t_1 + t_c)/T = \gamma + \gamma_c,$$

где t_1, t_c – время нарастания и спада тока силового дросселя;

$$K_{11} = \frac{R}{r} K_d K_{\text{ШИМ}} K_{y0} u_{cx1}, u_{cx1} = u_{вх} + u_{д.пр}.$$

Построим частотные характеристики разомкнутой системы в режиме прерывистого тока и проанализируем, как изменится запас устойчивости по фазе. Частотные характеристики в режиме прерывистого тока получены из формулы (3) аналогично частотным характеристикам в режиме непрерывного тока (рис. 3). Запас устойчивости по фазе при значениях параметров синтезированной системы, т.е. емкость выходного конденсатора $C_2 = 3300$ мкФ, равен $\mu_1 \approx 30^\circ$ (кривая 1 на рис. 3). При уменьшении емкости C_2 до значения 220 мкФ запас устойчивости по фазе увеличивается $\mu_2 \approx 100^\circ$ (кривая 2 на рис. 3).

Важной задачей исследования является снятие частотных характеристик неизменяемой части системы (рис. 4), которые определяются динамическими

свойствами LC-фильтра и, что особенно важно, широтно-импульсного модулятора (ШИМ).

Передаточная функция неизменяемой части, включающей широтно-импульсный модулятор, выходной LC-фильтр, выходной делитель напряжения, в режиме непрерывного тока описывается выражением

$$W_0(p) = \frac{K_0(1 + \tau_C p)}{T_\phi^2 [(p + \alpha_\phi)^2 + \omega_\phi^2]},$$

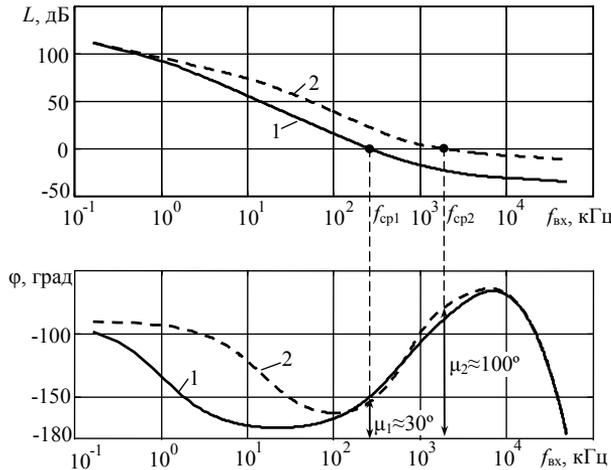


Рис. 3. АЧХ и ФЧХ разомкнутой дискретной системы в режиме прерывистого тока при $f = 100$ кГц и различных значениях постоянной времени выходного конденсатора $T_C = 0,33$ с (1) и $T_C = 0,022$ с (2)

а в z-форме

$$W_0(z, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{K_0}{T_\phi^2} d_1^{(1+\varepsilon-\varepsilon_1)} \left[\tau_C \frac{z \cos(1+\varepsilon-\varepsilon_1)\omega_\phi T - d_1 \cos(\varepsilon_1-\varepsilon)\omega_\phi T}{z^2 - 2zd_1 \cos \omega_\phi T + d_1^2} + \frac{1 - \tau_C \alpha_\phi}{\omega_\phi} \frac{z \sin(1+\varepsilon-\varepsilon_1)\omega_\phi T + d_1 \sin(\varepsilon_1-\varepsilon)\omega_\phi T}{z^2 - 2zd_1 \cos \omega_\phi T + d_1^2} \right], & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \\ \frac{K_0}{T_\phi^2} d_1^{(\varepsilon-\varepsilon_1)} z \left[\tau_C \frac{z \cos(\varepsilon-\varepsilon_1)\omega_\phi T - d_1 \cos(1-\varepsilon+\varepsilon_1)\omega_\phi T}{z^2 - 2zd_1 \cos \omega_\phi T + d_1^2} + \frac{1 - \tau_C \alpha_\phi}{\omega_\phi} \frac{z \sin(\varepsilon-\varepsilon_1)\omega_\phi T + d_1 \sin(1-\varepsilon+\varepsilon_1)\omega_\phi T}{z^2 - 2zd_1 \cos \omega_\phi T + d_1^2} \right], & \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases}$$

где $K_0 = K_d K_{\text{ШИМ}} K_\phi u_{\text{сх1}}$, $\tau_C = r_C C$ – постоянная времени выходного конденсатора.

С учетом наличия в контуре запаздывающего на $\varepsilon = \varepsilon_1$ импульсного элемента аналогично (2) получим

$$W_0(z, \varepsilon) = \frac{K_0}{T_\phi^2} d_1 \left[\tau_C \frac{z \cos \omega_\phi T - d_1}{z^2 - 2zd_1 \cos \omega_\phi T + d_1^2} + \frac{1 - \tau_C \alpha_\phi}{\omega_\phi} \frac{z \sin \omega_\phi T}{z^2 - 2zd_1 \cos \omega_\phi T + d_1^2} \right].$$

Для определения частотных характеристик система размыкалась на входе усилителя ошибки (вывод микросхемы 1 EAINV) и вместо цепи $R2, C4, C5$ подключался резистор с сопротивлением 10 кОм, сигнал генератора с амплитудой 0,15 В подавался на этот вывод через второй резистор с сопротивлением 10 кОм. При этом усилитель ошибки превращался в повторитель напряжения с инвертированием.

На рис. 4 показаны логарифмические частотные характеристики в режиме непрерывного тока, определенные из передаточной функции, на которые нанесены экспериментальные точки.

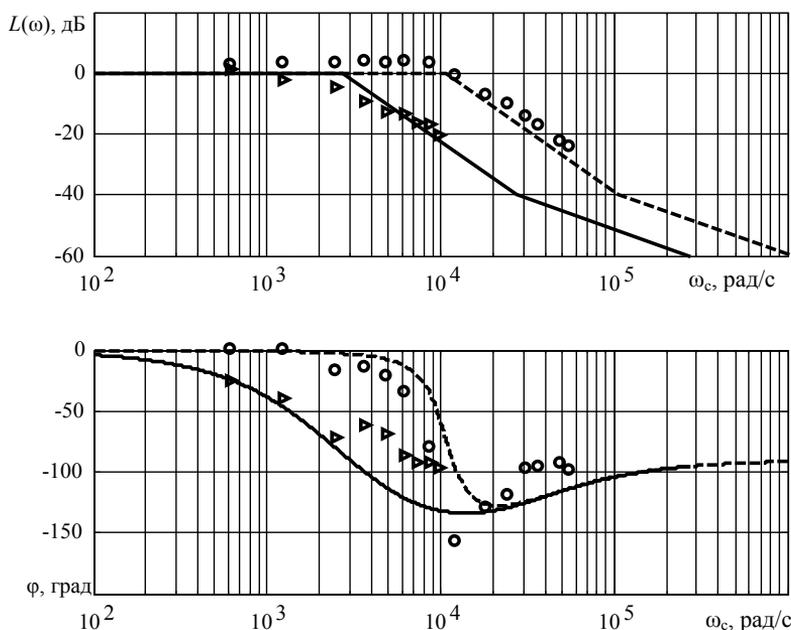


Рис. 4. Логарифмические частотные характеристики неизменяемой при синтезе части замкнутой системы в режиме непрерывного тока: расчетные при $C2=3300$ мкФ (—), $C2=220$ мкФ (- -); экспериментальные точки для $C2=3300$ мкФ ($\blacktriangle \blacktriangle$), $C2=220$ мкФ ($\circ \circ$)

В РПТ частотная передаточная функция отличается от функции, полученной для РНТ, определяется из выражения (3) и имеет следующий вид:

$$W_0(e^{j\omega T}) = K_d K_{\text{ШИМ}} \delta_3(e^{j\omega T})(1 + \tau_C j\omega) = K_0 \frac{\alpha_4(1 + \tau_C j\omega)}{\alpha_1 e^{j\omega T} - \alpha_2},$$

где $K_0 = K_d K_{\text{ШИМ}} \frac{u_{\text{сх1}}}{T_C}$. Вывод передаточных функций в режиме прерывистого тока подробно описан в [3].

Следует отметить, что для перехода в РПТ увеличивается сопротивление нагрузки R . Это приводит к увеличению постоянной времени $T_C = (R+r_C)C$ по сравнению с ее значением в РНТ и смещению соответствующего полюса передаточной функции в сторону низких частот (см. рис. 3).

На рис. 5 показаны логарифмические частотные характеристики в РПТ, на которые нанесены экспериментальные точки.

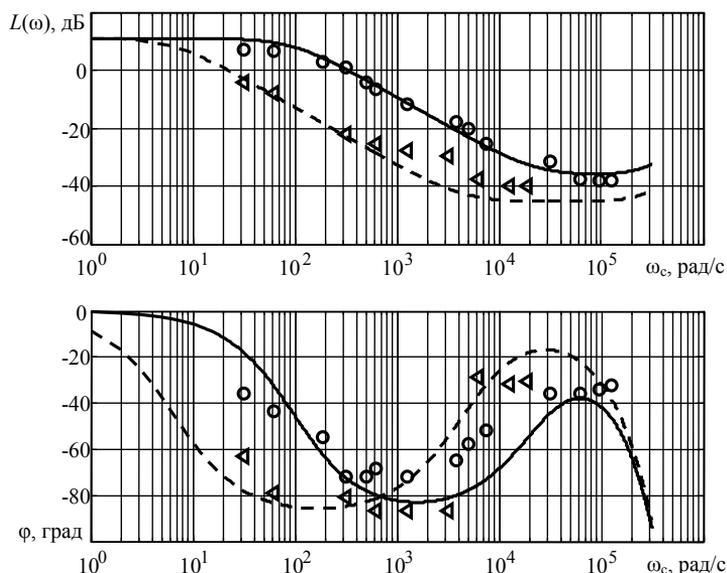


Рис. 5. Логарифмические частотные характеристики неизменяемой при синтезе части замкнутой системы в режиме прерывистого тока: расчетные при $C_2=3300$ мкФ (—), $C_2=220$ мкФ (- -); экспериментальные точки для $C_2=3300$ мкФ (▲ ▲), $C_2=220$ мкФ (○ ○)

Выводы. 1. Была подтверждена правильность расчетов частотных характеристик в режимах непрерывного и прерывистого тока, о чем свидетельствует приемлемое совпадение экспериментальных точек с построенными частотными характеристиками (рис. 4 и 5).

2. Синтезированная система в режиме непрерывного тока имеет достаточный запас по фазе $\mu \approx 53^\circ$, что говорит о приемлемой динамике системы. Полученные данные подтвердили правильность результатов расчета системы управления по непрерывной модели.

3. В режиме прерывистого тока при значениях параметров синтезированной системы запас устойчивости по фазе $\mu_1 \approx 30^\circ$ уменьшается по сравнению с таковым в режиме непрерывного тока. Если при этом уменьшить емкость выходного конденсатора, то можно восстановить значение μ до прежнего, поскольку частота среза возрастает до частоты $f_{ср2}$ (рис. 3), при котором запас по фазе равен $\mu_2 \approx 100^\circ$.

Литература

1. Белов Г.А. Линеаризованные дискретные структурные динамические модели импульсных ППН при модуляции момента выключения силового транзистора // Силовая электроника. 2014. № 4(49). С. 74–80.

2. Белов Г.А. Дискретные структурные динамические модели понижающего импульсного ППН при модуляции момента включения силового транзистора и двусторонней модуляции // Силовая электроника. 2015. № 5(56). С. 40–44.

3. Белов Г.А. Передаточная функция понижающего импульсного преобразователя в режиме прерывистого тока // Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем: материалы 11-й Всерос. науч.-техн. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2015. С. 14–31.

4. Белов Г.А., Абрамов С.В. Анализ устойчивости и показателей качества переходных процессов в одноконтурной системе управления понижающим импульсным преобразователем // Электричество. 2014. № 7. С. 49–57.

5. Белов Г.А., Абрамов С.В. Влияние частоты переключений на динамические показатели качества понижающего импульсного преобразователя с одноконтурной системой управления // Практическая силовая электроника. 2014. № 3(55). С. 5–12.

6. Белов Г.А., Серебрянников А.В., Павлова А.А. К синтезу одноконтурных систем управления понижающими импульсными преобразователями // Практическая силовая электроника. 2013. № 2(50). С. 26–33.

7. Белов Г.А., Серебрянников А.В., Павлова А.А. Синтез одноконтурной системы управления понижающим импульсным преобразователем // Практическая силовая электроника. 2013. № 3(51). С. 9–15.

8. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 968 с.

9. Biolek D., Biolkova V., Dobes J. Modeling of switched DC-DC converters by mixed s-z description. Proc. of IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS, 2006, doi: 10.1109/ISCAS.2006.1692714.

10. Choudhury S. Designing a TMS320F280x Based Digitally Controlled DC-DC Switching Power Supply. Application Report. Texas Instruments Incorporated, 2005, 16 p.

11. David M., Van de Sype', Koen de Gussem, Alex P. Van den Bossche, Jan A. Melkebeek. Small-Signal z-Domain Analysis of Digitally Controlled Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2006, vol. 21, iss. 2, pp. 470–478.

12. Gang Yang, Zhiliang Zhang. Unified Large Signal Modeling Method for DC-DC Converters in DCM. Proc. of 7th Int. Power Electronics and Motion Control Conf. (IPEMC), 2012, vol. 3, pp. 1561–1565, doi: 10.1109/IPEMC.2012.6259065.

13. Hassanzadeh A., Monfared M., Golestan S., Dowlatabadi R. Small Signal Averaged Model of DC Choppers for Control Studies. Proc. of Int. Conf. on Electrical Engineering and Informatics, 2011, pp. 1–4, doi: 10.1109/ICEEI.2011.6021728.

14. Husan Ali, Xiancheng Zheng, Xiaohua Wu, Shahbaz Khan, Saad M. Frequency Response Measurements of DC-DC Buck Converter. Proc. of IEEE Int. Conf. on Information and Automation, 2015, pp. 2233–2237, doi: 10.1109/ICInfA.2015.7279658.

15. Husan Ali, Xiancheng Zheng, Xiaohua Wu, Shahbaz Khan, Dawar Awan. Frequency Domain Based Controller Design for DC-DC Buck Converter. Proc. of 12th Int. Bhurban Conf. on Applied Sciences and Technology (IBCAST), 2015, pp. 146–151, doi: 10.1109/IBCAST.2015.7058495.

16. Kaur R., Kumar S. Stability and dynamic characteristics analysis of DC-DC buck converter via mathematical modeling. Proc. of Int. Conf. on Recent Developments in Control, Automation and Power Engineering (RDCAPE), 2015, pp. 253–258, doi: 10.1109/RDCAPE.2015.7281405.

17. Kondrath N., Kazimierzuk M.K. Unified model to derive control-to-output transfer function of peak current-mode-controlled pulse-width modulated dc-dc converters in continuous conduction mode. *IET Power Electronics*, 2012, vol. 5, iss. 9, pp. 1706–1713.

18. Laali S., Mahery H.M. Buck DC-DC Converter: Mathematical Modeling and Transient State Analyzes. Proc. of 3rd IEEE Int. Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems (PEDG), 2012, pp. 661–667, doi: 10.1109/PEDG.2012.6254073.

19. Maksimovic D., Zane R. Small-signal Discrete-time Modeling of Digitally Controlled DC-DC Converters. *IEEE COMPEL Workshops on Computers in Power Electronics*, 2006, vol. 22, iss. 6, pp. 231–235.

20. Maksimovic D., Zane R. Small-Signal Discrete-Time Modeling of Digitally Controlled PWM Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2007, vol. 22, iss. 6, pp. 2552–2556.

21. Priyanka P.S.K., Palli S.M.S. Modeling, Design & Stability Analysis of Power Converter // *International Journal of Education and applied research IJEAR*, 2014, vol. 4, iss. Spl-1, pp. 85–90.

22. Ruqi Li, Kan Seto, Kiefer J., Li S. Small-signal Characterization of Synchronous Buck Converters under Light Load Conditions. Proc. of IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), 2015, pp. 193–200, doi: 10.1109/ECCE.2015.7309688.

23. Sheng-Fu Hsiao, Dan Chen, Ching-Jan Chen, Hung-Shou Nien. A New Multiple-Frequency Small-Signal Model for High-Bandwidth Computer V-Core Regulator Applications. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2015, vol. 31, iss. 1, pp. 733–742.

АБРАМОВ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ – аспирант кафедры промышленной электроники, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары, (dim_dein@bk.ru).

S. ABRAMOV

FREQUENCY CHARACTERISTICS THE BUCK PULSE CONVERTER
IN CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS CURRENT MODE

Key words: pulse converter, frequency characteristics, discontinuous and continuous current mode, discrete model, the transfer function.

Dynamic pulse DC-DC converters now in most cases are investigated with frequency methods, since the frequency characteristics are relatively easily constructed and tested experimentally. However, the method of calculating the frequency characteristics of pulse converters are still insufficiently developed, especially in the discontinuous current mode, because they are based primarily on insufficiently accurate averaged dynamic models.

It shows the results of calculating the frequency characteristics of the step-down converter with single-loop control system. To construct the expression using frequency characteristics of the transfer functions of discrete open system under discontinuous and continuous current mode. Accuracy of results of construction and the accuracy of the mathematical model are tested with the experimental setup for which frequency characteristics of the unchangeable part of the system are analyzed.

References

1. Belov G.A. *Linearizovannye diskretnye strukturnye dinamicheskie modeli impul'snykh PPN pri modulyatsii momenta vyklyucheniya silovogo tranzistora* [The linearized discrete structural dynamic models pulse converters modulation at the moment off the power transistor]. *Silovaya elektronika* [Power electronics], 2014, no. 4 (49), pp. 74–80.
2. Belov G.A. *Diskretnye strukturnye dinamicheskie modeli ponizhayushchego impul'snogo PPN pri modulyatsii momenta vlyucheniya silovogo tranzistora i dvustoronney modulyatsii* [Discrete structural dynamic models buck pulse converter modulation at the moment when the power transistor and two-way modulation]. *Silovaya elektronika* [Power electronics], 2015, no. 5 (56), pp. 40–44.
3. Belov G.A. *Peredatochnaya funktsiya ponizhayushchego impul'snogo preobrazovatelya v rezhime preryvistogo toka* [The transfer function of a buck converter in the discontinuous current mode]. *Dinamika nelineynykh diskretnykh elektrotekhnicheskikh i elektronnykh sistem: materialy 11-i Vseros. nauch.-tekhn. konf.* [Proc. of 11th Rus. Sci. and Tech. Conf. «The dynamics of nonlinear discrete electrical and electronic systems»]. Cheboksary, Chuvash State Univesity Publ., 2015, pp. 14–31.
4. Belov G.A., Abramov S.V. *Analiz ustoychivosti i pokazatelei kachestva perekhodnykh protsessov v odnokonturnoi sisteme upravleniya ponizhayushchim impul'snym preobrazovatelem* [Analysis of the stability and quality of transients in single-loop control system buck converter]. *Elektrichestvo* [Electricity], 2014, no. 7, pp. 49–57.
5. Belov G.A., Abramov S.V. *Vliyaniye chastoty pereklyucheniya na dinamicheskie pokazateli kachestva ponizhayushchego impul'snogo preobrazovatelya s odnokonturnoi sistemoy upravleniya* [Effect of switching frequency on the dynamic parameters of quality down to the single-pulse converter control system]. *Prakticheskaya silovaya elektronika* [Applied Power Electronics], 2014, no. 3(55), pp. 5–12.
6. Belov G.A., Serebryannikov A.V., Pavlova A.A. *K sintezu odnokonturnykh sistem upravleniya ponizhayushchimi impul'snymi preobrazovatelyami* [The synthesis of single-loop control systems buck pulse converters]. *Prakticheskaya silovaya elektronika* [Applied Power Electronics], 2013, no. 2(50), pp. 26–33.
7. Belov G.A., Serebryannikov A.V., Pavlova A.A. *Sintez odnokonturnoi sistemy upravleniya ponizhayushchim impul'snym preobrazovatelem* [Synthesis of single-loop control system buck converter]. *Prakticheskaya silovaya elektronika* [Applied Power Electronics], 2013, no. 3(51), pp. 9–15.

8. Tsyarkin Ya.Z. *Teoriya lineynykh impul'snykh system* [The theory of linear pulse systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 968 p.
9. Bialek D., Biolkova V., Dobes J. Modeling of switched DC-DC converters by mixed s-z description. Proc. of IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS, 2006, doi: 10.1109/ISCAS.2006.1692714.
10. Choudhury S. Designing a TMS320F280x Based Digitally Controlled DC-DC Switching Power Supply. Application Report. Texas Instruments Incorporated, 2005, 16 p.
11. David M., Van de Sype', Koen de Gussem, Alex P. Van den Bossche, Jan A. Melkebeek. Small-Signal z-Domain Analysis of Digitally Controlled Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2006, vol. 21, iss. 2, pp. 470–478.
12. Gang Yang, Zhiliang Zhang. Unified Large Signal Modeling Method for DC-DC Converters in DCM. Proc. of 7th Int. Power Electronics and Motion Control Conf. (IPEMC), 2012, vol. 3, pp. 1561–1565, doi: 10.1109/IPEMC.2012.6259065.
13. Hassanzadeh A., Monfared M., Golestan S., Dowlatabadi R. Small Signal Averaged Model of DC Choppers for Control Studies. Proc. of Int. Conf. on Electrical Engineering and Informatics, 2011, pp. 1–4, doi: 10.1109/ICEEI.2011.6021728.
14. Husan Ali, Xiancheng Zheng, Xiaohua Wu, Shahbaz Khan, Saad M. Frequency Response Measurements of DC-DC Buck Converter. Proc. of IEEE Int. Conf. on Information and Automation, 2015, pp. 2233–2237, doi: 10.1109/ICInfA.2015.7279658.
15. Husan Ali, Xiancheng Zheng, Xiaohua Wu, Shahbaz Khan, Dawar Awan. Frequency Domain Based Controller Design for DC-DC Buck Converter. Proc. of 12th Int. Bhurban Conf. on Applied Sciences and Technology (IBCAST), 2015, pp. 146–151, doi: 10.1109/IBCAST.2015.7058495.
16. Kaur R., Kumar S. Stability and dynamic characteristics analysis of DC-DC buck converter via mathematical modeling. Proc. of Int. Conf. on Recent Developments in Control, Automation and Power Engineering (RDCAPE), 2015, pp. 253–258, doi: 10.1109/RDCAPE.2015.7281405.
17. Kondrath N., Kazimierzczuk M.K. Unified model to derive control-to-output transfer function of peak current-mode-controlled pulse-width modulated dc-dc converters in continuous conduction mode. *IET Power Electronics*, 2012, vol. 5, iss. 9, pp. 1706–1713.
18. Laali S., Mahery H.M. Buck DC-DC Converter: Mathematical Modeling and Transient State Analyzes. Proc. of 3rd IEEE Int. Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems (PEDG), 2012, pp. 661–667, doi: 10.1109/PEDG.2012.6254073.
19. Maksimovic D., Zane R. Small-signal Discrete-time Modeling of Digitally Controlled DC-DC Converters. *IEEE COMPEL Workshops on Computers in Power Electronics*, 2006, vol. 22, iss. 6, pp. 231–235.
20. Maksimovic D., Zane R. Small-Signal Discrete-Time Modeling of Digitally Controlled PWM Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2007, vol. 22, iss. 6, pp. 2552–2556.
21. Priyanka P.S.K., Palli S.M.S. Modeling, Design & Stability Analysis of Power Converter // International. *Journal of Education and applied research IJEAR*, 2014, vol. 4, iss. Spl-1, pp. 85–90.
22. Ruqi Li, Kan Seto, Kiefer J., Li S. Small-signal Characterization of Synchronous Buck Converters under Light Load Conditions. Proc. of IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), 2015, pp. 193–200, doi: 10.1109/ECCE.2015.7309688.
23. Sheng-Fu Hsiao, Dan Chen, Ching-Jan Chen, Hung-Shou Nien. A New Multiple-Frequency Small-Signal Model for High-Bandwidth Computer V-Core Regulator Applications. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2015, vol. 31, iss. 1, pp. 733–742.

ABRAMOV SERGEI – Post-Graduate Student, Industrial Electronics Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (dim_dein@bk.ru).

Ссылка на статью: Абрамов С.В. Частотные характеристики понижающего импульсного преобразователя в режимах непрерывного и прерывистого тока // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 5–14.

УДК 621.318
ББК 22.334

А.А. АФАНАСЬЕВ

ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ СТАЛИ

Ключевые слова: уравнения Ландау – Лифшица; переменное, вращательное и переменное-вращательное перемагничивание.

На основе решения уравнения Ландау – Лифшица для однодоменной структуры магнетика предлагаются формулы для расчёта гистерезисных явлений при переменном, вращательном и переменное-вращательном перемагничивании электро-технической стали. Рассматриваются расчётные кривые нутации вектора намагниченности, гистерезисные петли при продольном и поперечном гармоническом воздействии внешнего магнитного поля на домен с учётом его структуры при статическом симметричном намагничивании. Обсуждаются возможности использования полученных уравнений для многодоменного ферромагнетика.

Современные программы численного математического моделирования электрических машин позволяют при минимуме допущений получить результаты, близкие к данным физических исследований. Однако адекватный расчет магнитных потерь в ферромагнитных сердечниках вызывает значительные трудности ввиду сложности происходящих явлений.

Математические подходы к описанию динамических процессов в стали носят феноменологический характер, и их достоверность должна подтверждаться опытными данными.

Среди известных (и нашедших достаточно широкое применение в настоящее время) методов расчета магнитных потерь, предложенных в 1980–1990-е гг., следует назвать модели Прейзаха [15, 16] и Джилса – Атертона [18]. Первая модель оперирует с плотностью распределения множества специфических магнитных доменов, имеющих в одноосном магнитном поле прямоугольные симметричные петли гистерезиса с предельными значениями ± 1 ¹.

Модель учитывает толщину шихтованных листов электротехнической стали, её электропроводность, но имеет существенное ограничение, связанное с требованием квазистационарности магнитного поля, поскольку предполагает полное проникновение магнитного потока в сечение стали.

Применение нейронных сетей позволило учесть в этой модели и динамические эффекты [17]. Свидетельством универсальных свойств такой версии модели является возможность учёта поперечного магнитного поля (гистерезис вращающегося магнитного поля) и действия механических напряжений и температуры [3, 14, 17, 19]. Однако её реализация достаточно сложна и специфична.

Модель Джилса – Атертона из-за своей простоты и доступности получила достаточно широкое применение [1, 10]. В ней используются простейшая аппроксимация статической петли гистерезиса и линейная связь коэрцитив-

¹ Эти домены являются абстрактными образованиями, не имеющими никакого отношения к реальным макроскопическим доменам, структурированным в ферромагнетиках обменной энергией атомов, имеющих межатомное расстояние a и радиус электронных оболочек s с вакантными местами r , причём $3,2 \leq a/r \leq 6,2$ [8].

ной силы динамической петли гистерезиса со скоростью изменения напряженности магнитного поля.

Расчёт гистерезисных явлений на основе решения уравнения Ландау – Лифшица – Гильберта

В 1960–1990-е гг. в МЭИ под руководством А.И. Пирогова и Ю.М. Шамаева были широко развёрнуты работы по исследованию динамических свойств магнитных сердечников и лент для устройств автоматики и вычислительной техники [4, 5]. Ещё ранее значительные результаты в этом направлении были получены К.М. Поливановым [6, 7].

В качестве физико-математической основы для исследуемых процессов были взяты различные варианты решений уравнения Ландау – Лифшица в модификации его Гильбертом применительно к поведению вектора намагниченности \mathbf{M} в однодоменном ферромагнетике, находящемся в магнитном поле с напряжённостью \mathbf{H} . Это поле состоит из внешнего и внутреннего полей ферромагнетика. Последние связаны с обменной энергией атомов (она формирует домены с намагниченностью насыщения), анизотропией кристаллических структур, собственным магнитоэлектрическим магнитным полем.

Каноническая форма уравнения имеет вид [9]

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}] - \alpha \frac{\gamma}{M_s} [\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}]], \quad (1)$$

где $\gamma < 0$ – скалярный множитель, близкий по модулю к гиромангнитному отношению свободных электронов ($|\gamma| \approx 2,2 \cdot 10^5$); $\alpha > 0$ – безразмерная постоянная, характеризующая скорость релаксации вектора намагниченности \mathbf{M} в магнитном поле \mathbf{H} (её значение уточняется из опыта); M_s – модуль вектора намагниченности, имеющий известный смысл намагниченности насыщения.

Кроме формулы (1) возможен ещё другой эквивалентный вид рассматриваемого уравнения

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \tilde{\gamma}[\mathbf{M}, \mathbf{H}] - \frac{\alpha}{M_s} \left[\mathbf{M}, \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right], \quad (2)$$

где $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2}$. Второе слагаемое в этом уравнении связывают с именем

Гильберта. При всех движениях (эволюциях) вектора \mathbf{M} , согласно уравнению (1), (2), его длина остается неизменной.

Фиксируем элементарный объём магнитного материала радиусом-вектором \mathbf{r} . Момент импульса (количество движения) \mathbf{J} единицы объёма ферромагнетика, вызываемый спином электронов (с поправкой их орбитального движения), связан с намагниченностью простым выражением

$$\mathbf{M} = \gamma \mathbf{J}. \quad (3)$$

Поскольку изменение количества движения $\frac{d\mathbf{J}}{dt}$ равно механическому моменту \mathbf{T} , из уравнения (1) при отсутствии в нём релаксационного члена и учёте формулы (3) следует

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\gamma} \frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{M}, \mathbf{H}]. \quad (4)$$

Это равенство показывает, что при разнонаправленности векторов \mathbf{M} и \mathbf{H} конец вектора \mathbf{M} под действием механического момента \mathbf{T} будет совершать прецессионное движение по окружности относительно вектора \mathbf{H} .

Второе слагаемое в уравнении (1) с учётом последнего равенства (4) представляет ещё один момент

$$\mathbf{R} = -\frac{\alpha}{M_s} [\mathbf{M}, \mathbf{T}], \quad (5)$$

вызывающий сближение (нутацию) вектора намагниченности \mathbf{M} с вектором \mathbf{H} (рис. 1).

Гистерезисные явления при переменном внешнем поле (переменное перемagnичивание). Если предположить, что прямая в пространстве, по которой может изменяться во времени вектор \mathbf{H} , сохраняет своё положение и совпадает с осью z декартовой системы координат, то векторное уравнение (1) в сферической системе координат будет представлено двумя скалярными уравнениями [9]

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\gamma H(t), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\alpha \gamma H(t) \sin \vartheta, \quad (6)$$

где φ – угол между осью x и направлением проекции вектора \mathbf{M} на плоскость $0, x, y$; ϑ – угол между осью z и вектором \mathbf{M} .

Первое уравнение описывает процесс движения² (прецессии) проекции вектора \mathbf{M} на плоскости $0, x, y$, второе – процесс сближения (нутации) этого вектора с осью z . В последующем будем исследовать именно процесс нутации как составную часть полного движения этого вектора.

Для проекции вектора \mathbf{M} на ось z справедливо

$$M = M_s \cos \vartheta. \quad (7)$$

После взятия производной по времени от этого равенства с учетом второго уравнения в (6) получим

$$\frac{dM}{dt} = \alpha \gamma M_s H(t) \sin^2 \vartheta. \quad (8)$$

Из выражения (7) следует очевидное равенство

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \left(\frac{M}{M_s} \right)^2,$$

подставляя которое в (8), получим окончательно

$$\frac{dM}{dt} = \alpha \gamma M_s \left[1 - \left(\frac{M}{M_s} \right)^2 \right] H(t). \quad (9)$$

Аналогичное дифференциальное уравнение в [4, 5] содержит вместо γ упомянутый выше параметр $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2}$.

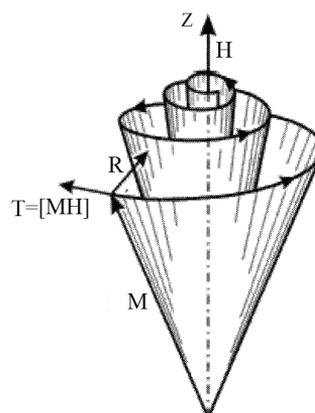


Рис. 1. Прецессия и нутация вектора намагниченности \mathbf{M}

² Учитывая, что $\gamma \approx 2,2 \cdot 10^5$, угловая скорость прецессии $\frac{d\varphi}{dt}$ может составлять 10^8 рад/с и более.

Будем в дальнейшем пренебрегать в магнетике анизотропией и напряженностью магнитостатического поля \mathbf{H} , направленного встречно вектору намагниченности³. Тогда магнитная индукция в магнетике будет равна

$$B = \mu_0 M. \quad (10)$$

С учётом (10) уравнение (9) можно записать в таком виде:

$$\frac{dB}{dt} = \alpha \gamma B_s \left[1 - \left(\frac{B}{B_s} \right)^2 \right] H(t), \quad (11)$$

где B_s – магнитная индукция насыщения; $H(t)$ – напряжённость внешнего магнитного поля, действующего по оси z .

При прекращении действия внешнего поля обменные силы спонтанно изменяют значение индукции до остаточного значения B_r (эффект последействия).

В справочных изданиях приводится информация о симметричных статических петлях гистерезиса $B = B(H)$ для различных марок электротехнических сталей. Эта информация в виде зависимостей $H_0 = H_c(B)$ (одна зависимость соответствует восходящей, другая – нисходящей ветви статической петли) может использоваться в уравнении (11) как фрагменты внешнего магнитного напряжения, формирующего статическую петлю (рис. 2). Тогда разность $H(t) = H_1(t) - H_c(B)$ может рассматриваться как внешнее напряжение, выстраивающее динамическую петлю на базе статической⁴.

Кривая на рис. 2 является кривой намагничивания и построена по формуле, предложенной в [4]:

$$H_c(B) = \frac{1}{k_3 \gamma} \ln \left(\frac{1 - \frac{B_r \cdot \text{sign } B_H}{B_s}}{1 + \frac{B_r \cdot \text{sign } B_H}{B_s}} \right) + k^{k_1 |B|^{k_2}} \cdot \ln \left(\frac{1 + \frac{B}{B_s}}{1 - \frac{B}{B_s}} \right) - H_{cB}, \quad (12)$$

в ней применительно к изотропной холоднокатаной слаболегированной (содержание кремния 0,9–1,8% [11]) стали 2213 с толщиной листа 0,5 мм принято: $B_r = 0,95$ Тл, $B_s = 1,6$ Тл, $B_H = -B_r$, $H_{cB} = 80$ кА/м, $k = 1,5$, $k_1 = 0,7$, $k_2 = 4,1$, $k_3 = 7,696 \cdot 10^{-8}$.

На рис. 3, иллюстрирующем переменное перемагничивание, показаны кривые решений дифференциальных уравнений⁵ (6), (11) с коэффициентом релаксации $\alpha = 9 \cdot 10^{-5}$ и зависимость $B(H)$ для частоты 50 Гц применительно к изотропной холоднокатаной стали 2213 с толщиной листа 0,5 мм [11]. Потери на гистерезис, вычисленные по площади петли $B(H)$ на рис. 3, составили 2,77 Вт/кг. Полные магнитные потери для магнитной индукции $B_m = 1,5$ Тл на частоте 50 Гц равны 4,44 Вт/кг [11].

³ Вводя коэффициент восприимчивости k_m [6], имеем $M = k_m H$ и $B = \mu_0(k_m + 1)H$, где $\mu = k + 1$ – относительная магнитная проницаемость. Поскольку для электротехнических сталей при значениях $M < M_s$ имеем $\mu \gg 1$, можно считать $B = \mu_0 k_m H = \mu_0 M$.

⁴ В последующих графических построениях зависимость $H_0 = H_c(B)$ представляется как однозначная кривая намагниченности, у которой коэрцитивная сила $H_{cB} = 0$.

⁵ Решения дифференциальных уравнений и графические построения выполнялись с помощью математической программы MathCAD 15.

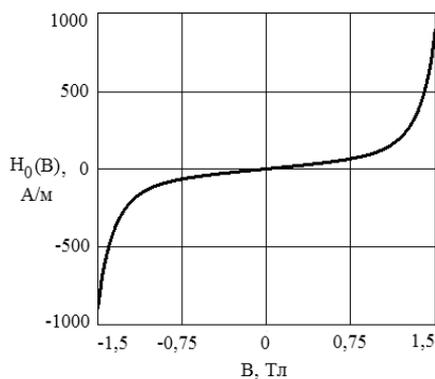


Рис. 2. Кривая намагничивания $H_0 = H_c(B)$

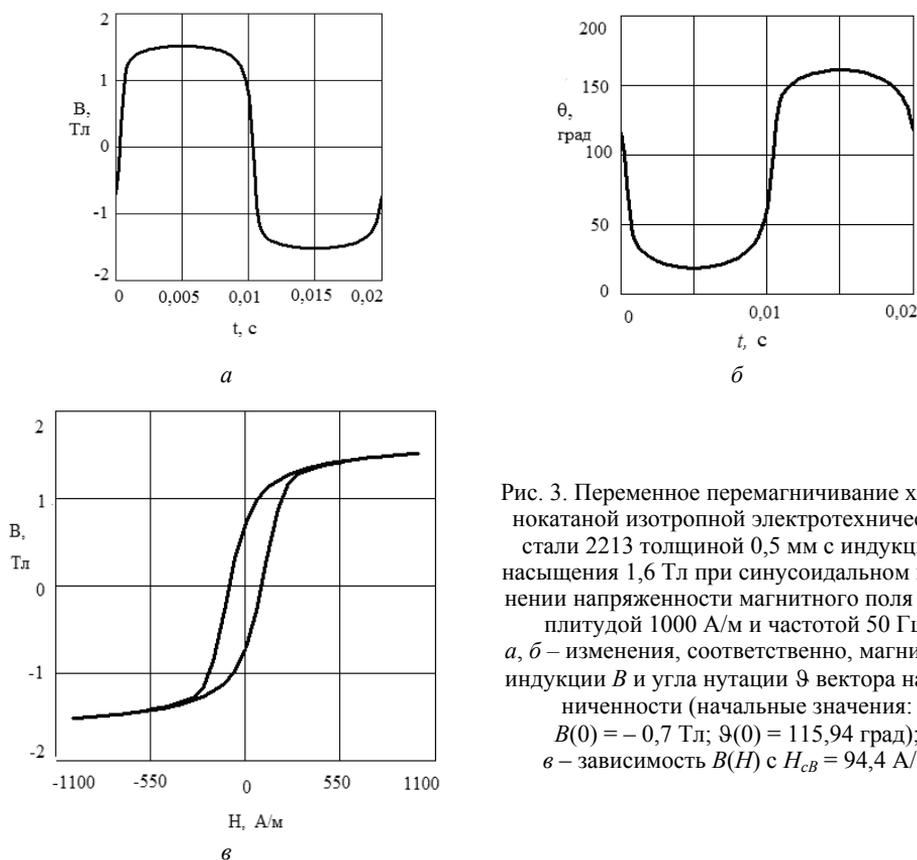


Рис. 3. Переменное перемагничивание холоднокатаной изотропной электротехнической стали 2213 толщиной 0,5 мм с индукцией насыщения 1,6 Тл при синусоидальном изменении напряженности магнитного поля с амплитудой 1000 А/м и частотой 50 Гц:
a, б – изменения, соответственно, магнитной индукции B и угла поворота ϑ вектора намагниченности (начальные значения: $B(0) = -0,7$ Тл; $\vartheta(0) = 115,94$ град);
в – зависимость $B(H)$ с $H_{cB} = 94,4$ А/м

Учёт влияния различных факторов на магнитные свойства электротехнической стали. Факторы различной природы могут оказывать влияние на весь спектр параметров стали: магнитную проницаемость μ (начальную μ_n и максимальную μ_{max}); остаточную индукцию B_r ; индукцию насыщения B_s ;

коэрцитивную силу H_{cB} ; потери в стали (гистерезисные P_r и от вихревых токов P_v); магнитострикцию и др. [8]

Влияющие факторы связаны в первую очередь с технологией промышленного изготовления стали, геометрическими формами изделия, условиями эксплуатации.

При феноменологическом подходе к рассмотрению явлений перемагничивания стали следует сопоставлять полученные результаты с опытными данными. Используемый математический аппарат имеет параметры, выбор которых диктуется именно минимизацией расхождений с опытом. К таким параметрам относятся: коэффициент релаксации α , B_s , B_r , H_{cB} , μ_n , μ_{\max} . На основе этих параметров выстраивается зависимость $H_0 = H_c(B)$, представленная формулой (12).

Упругие статические и динамические деформации стали (растяжение, сжатие) влияют на коэрцитивную силу H_{cB} и, как следствие, на гистерезисные потери. При растяжении стали H_{cB} увеличивается, при сжатии – уменьшается.

В рассматриваемой модели гистерезиса воздействие на коэффициент релаксации α позволяет изменять коэрцитивную силу и, следовательно, имитировать процесс механической деформации стали.

На рис. 4 показана гистерезисная петля, полученная при решении дифференциального уравнения (11), в котором коэффициент α совершает гармонические колебания в соответствии с равенством

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \sin(2\pi f_1 t),$$

в котором принято $\alpha_0 = \Delta\alpha = 0,00009$; $f_1 = 2500$ Гц.

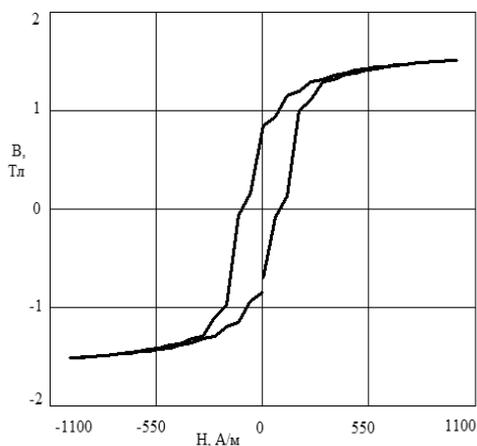


Рис. 4. Переменное перемагничивание холоднокатаной изотропной электротехнической стали 2213 толщиной 0,5 мм с индукцией насыщения 1,6 Тл при синусоидальном изменении напряженности магнитного поля с амплитудой 1000 А/м и частотой 50 Гц: коэффициент релаксации имеет переменную составляющую, гармонически изменяющуюся с частотой 2500 Гц

Ветви полученной петли состоят уже из негладких кривых.

Гистерезисные потери для этой петли, полученные по формуле (23), составили 2,81 Вт/кг, что несколько больше потерь при $\alpha = \alpha_0$ (2,77 Вт/кг).

Аналогичные петли наблюдались на специальной установке, где перемагничиваемые образцы стали подвергались упругим периодическим механическим воздействиям [19].

Гистерезисные явления при вращающемся внешнем поле (переменно-вращательное и вращательное перемагничивание). В магнитных сердечниках электрических машин помимо переменного перемагничивания (в трансформаторах, зубцах) наблюдается вращательное или переменное-вращательное (в ярмах) перемагничивание. Опытные данные свидетельствуют [13], что гистерезисные потери при этом виде перемагничивания могут до полутора раз превышать аналогичные потери переменного перемагничивания при магнитных индукциях до 1 Тл. При больших уровнях индукции наблюдается обратная картина.

При произвольной ориентации вектора \mathbf{H} векторное уравнение (1) в сферической системе координат будет представлено двумя более общими скалярными уравнениями [9]

$$\frac{d\varphi}{dt} \sin \vartheta = \gamma H_{\vartheta}(t) + \alpha \gamma H_{\varphi}(t), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \alpha \gamma H_{\vartheta}(t) - \gamma H_{\varphi}(t), \quad (13)$$

где $H_{\vartheta}(t)$, $H_{\varphi}(t)$ – проекции вектора \mathbf{H} в сферических координатах будут равны

$$\begin{cases} H_{\vartheta}(t) = H_x(t) \cos \vartheta \cos \varphi + H_y(t) \cos \vartheta \sin \varphi - H_z(t) \sin \vartheta, \\ H_{\varphi}(t) = -H_x(t) \sin \varphi + H_y(t) \cos \varphi. \end{cases} \quad (14)$$

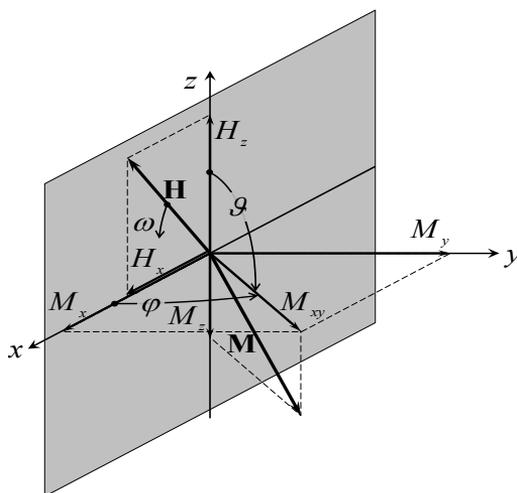


Рис. 5. Вращение вектора \mathbf{H} в плоскости $0xz$

Будем полагать, что вектор \mathbf{H} совершает вращательное движение в плоскости $0xz$, описывая своим концом, для общности случая, эллипс. Проекции вектора на оси z и x совершают гармонические колебания с разными амплитудами H_{zm} и H_{xm} (рис. 5):

$$H_x(t) = H_{xm} \cos \omega t, \quad H_z(t) = H_{zm} \sin \omega t. \quad (15)$$

Для этой плоскости с учётом формул (14) имеем

$$\begin{cases} \varphi = 0, \quad H_y(t) = 0, \quad H_{\varphi}(t) = 0, \\ H_{\vartheta}(t) = H_x(t) \cos \vartheta - H_z(t) \sin \vartheta. \end{cases} \quad (16)$$

В результате второе уравнение (13) для угла нутации ϑ получит вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \alpha\gamma[H_x(t)\cos\vartheta - H_z(t)\sin\vartheta]. \quad (17)$$

При $H_{zm} = H_{xm}$ имеем круговое вращение, при $H_{zm} \ll H_{xm}$ – переменновращательное перемагничивание, близкое к переменному.

Дифференцируя равенство (7) и учитывая (17), получим⁶

$$\frac{dM}{dt} = -\alpha\gamma M_s [H_x(t)\cos\vartheta - H_z(t)\sin\vartheta] \sin\vartheta. \quad (18)$$

После подстановки в эту формулу очевидных выражений

$$\sin\vartheta = \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_s}\right)^2}, \quad \cos\vartheta = \frac{M}{M_s} \quad (19)$$

и равенства (10) будем иметь окончательно

$$\frac{dB}{dt} = \alpha\gamma B_s \left[1 - \left(\frac{B}{B_s}\right)^2\right] H_{zm} \sin\omega t - \alpha\gamma B \sqrt{1 - \left(\frac{B}{B_s}\right)^2} H_{xm} \cos\omega t. \quad (20)$$

При учёте известной статической петли гистерезиса по оси z , полученной экспериментально, и различия магнитных свойств стали по направлениям перпендикулярных осей z и x (явление анизотропии) коэффициент релаксации α в слагаемых правой части формулы (20) будет неодинаковым. В этом общем случае формулу (20) запишем так:

$$\frac{dB}{dt} = \alpha_z \gamma B_s \left[1 - \left(\frac{B}{B_s}\right)^2\right] [H_{zm} \sin\omega t - H_0(B)] - \alpha_x \gamma B \sqrt{1 - \left(\frac{B}{B_s}\right)^2} H_{xm} \cos\omega t, \quad (21)$$

где α_x, α_z – коэффициенты релаксации вектора \mathbf{M} применительно к внешним магнитным полям, действующим по осям z и x .

При эллиптическом вращении вектора \mathbf{H} в плоскости $z, 0, x$ векторы \mathbf{M} и \mathbf{B} будут следовать за ним, одновременно совершая прецессионные и нутационные движения в соответствии с уравнением (21). Поскольку частота прецессионного вращения векторов \mathbf{M} и \mathbf{B} в миллион и более раз превышает частоту вращения вектора \mathbf{H} (см. сноску 2), указанное следование обеспечивается за счёт только нутационного изменения угла ϑ в интервале

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad (22)$$

при котором проекции векторов \mathbf{M} и \mathbf{B} на ось z совершают колебания с частотой ω изменения вектора \mathbf{H} , в том числе и при его переменновращательном и вращательном движении. Но сама величина векторов \mathbf{M} и \mathbf{B} зависит, как видно из уравнения (21), от составляющих $H_x(t)$ и $H_z(t)$ вектора \mathbf{H} .

В рабочем интервале изменения проекции M вектора \mathbf{M} на ось z справедливо неравенство

$$-M_s \leq M \leq M_s.$$

⁶ В равенствах, соответственно, (7) и (10): $M = M_s \cos\vartheta$; $B = \mu_0 M$ символы M и B , очевидно, обозначают проекции вектора намагниченности \mathbf{M} и магнитной индукции \mathbf{B} на ось z (см. рис. 5). Для удобства записи и чтения предыдущих и последующих формул индекс z у символов M и B опускается.

Поэтому диапазон изменения угла ϑ , соответствующий формулам (19), составляет

$$0 \leq \vartheta \leq \pi. \quad (23)$$

В этом случае проекция

$$B_x = B_s \sin \vartheta \quad (24)$$

вектора \mathbf{B} на ось x будет всегда положительной, что не соответствует физике явления. Для правильной идентификации угла ϑ следует использовать дифференциальное уравнение (17), определяющее этот угол, в совместной системе с дифференциальным уравнением (18) (приняв к нём $B = M$, $B_s = M_s$) и равенством (24)

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} = \alpha_z \gamma \{H_x(t) \cos \vartheta - [H_{zm} \sin \omega t - H_0(B)] \sin \vartheta\}, \\ \frac{dB}{dt} = -\gamma B_s \{\alpha_x H_x(t) \cos \vartheta - \alpha_z [H_{zm} \sin \omega t - H_0(B)] \sin \vartheta\} \sin \vartheta, \\ B_x = B_s \sin \vartheta. \end{cases} \quad (25)$$

Дифференцирование равенства (24) приводит и к дифференциальному уравнению для определения индукции B_x

$$\frac{dB_x}{dt} = \gamma B_s \{\alpha_x H_x(t) \cos \vartheta - \alpha_z [H_{zm} \sin \omega t - H_0(B)] \sin \vartheta\} \cos \vartheta, \quad (26)$$

аналогично второму уравнению для индукции B в системе (25).

При использовании системы уравнений (25) наблюдается неполное выполнение очевидного равенства $B_s = \sqrt{B^2 + B_x^2}$. Разница между левыми и правыми частями его в форме

$$\Delta B_s = \sqrt{B^2 + B_x^2} / B_s \quad (27)$$

для некоторых локальных значений нутационного угла ϑ может достигать 20–25%.

Если в системе (25) второе дифференциальное уравнение заменить равенством $B = B_s \cos \vartheta$, то, очевидно, указанная погрешность исчезнет, но в этом варианте исключается возможность формировать динамическую петлю гистерезиса на основе статической петли, получаемой из опыта.

Нижеследующие рис. 6 иллюстрируют результаты решения системы (25) применительно к вращательному перемагничиванию при $\alpha_x = 4,6 \cdot 10^{-6}$; $\alpha_z = 9 \cdot 10^{-5}$ на частоте 500 Гц с одинаковыми амплитудами продольного и поперечного внешнего поля величиной 800 А/м.

Если в системе уравнений (25) последнее уравнение, определяющее индукцию B_x , заменить дифференциальным уравнением (26), то, как видно из рис. 7, характер кривых $B_x = B_x(t)$ и $B_x = B_x(H_x)$ изменится. Это связано с различием функций, задающих начальные значения кривых. Кривые на рис. 6 зависят от начальных значений дифференциального уравнения для угла $\vartheta(t)$, а кривые на рис. 7 – от дифференциального уравнения (26) для магнитной индукции $B_x(t)$.

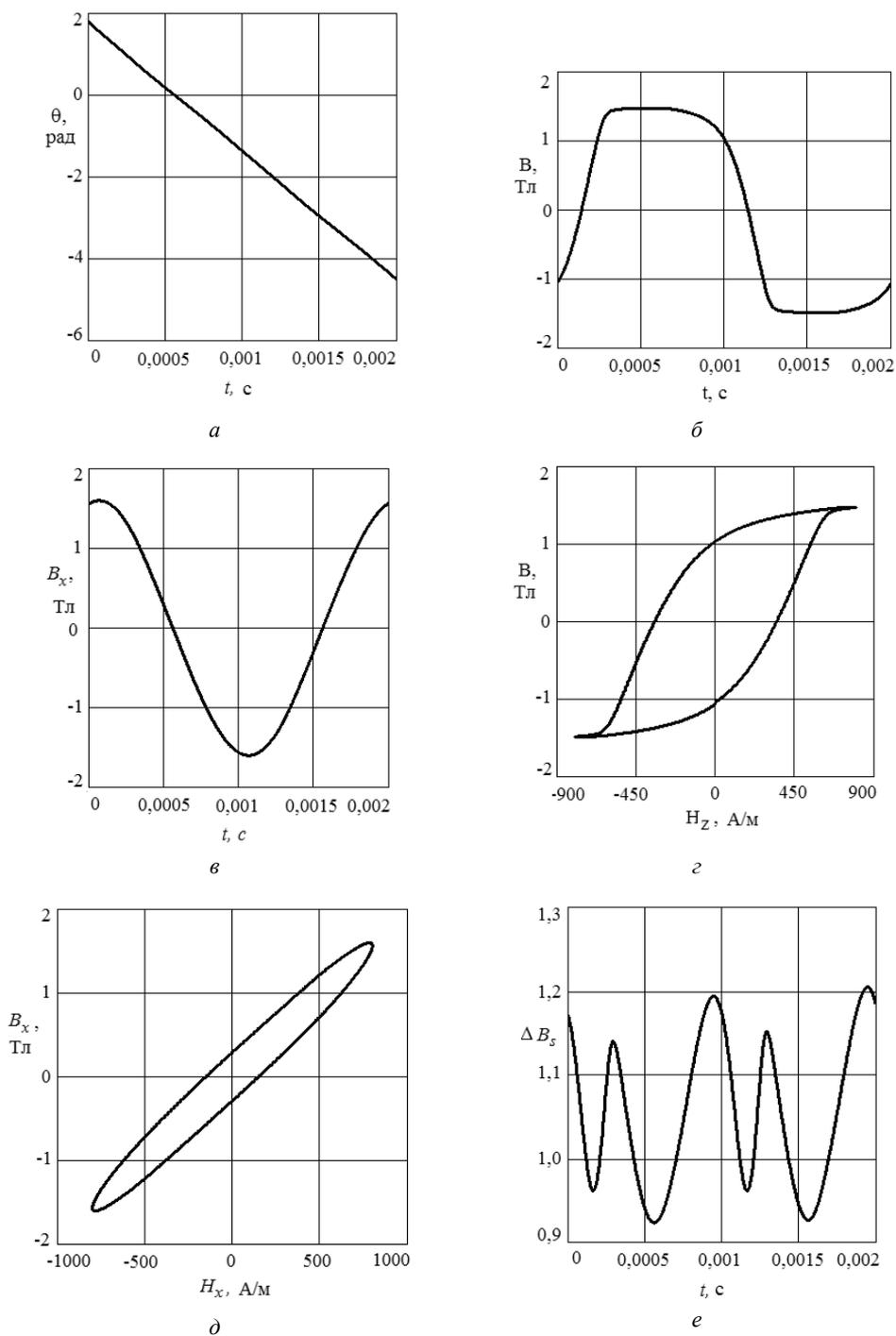


Рис. 6. Кривые вращательного перемagnичивания на частоте 500 Гц, полученные при решении системы уравнений (25)

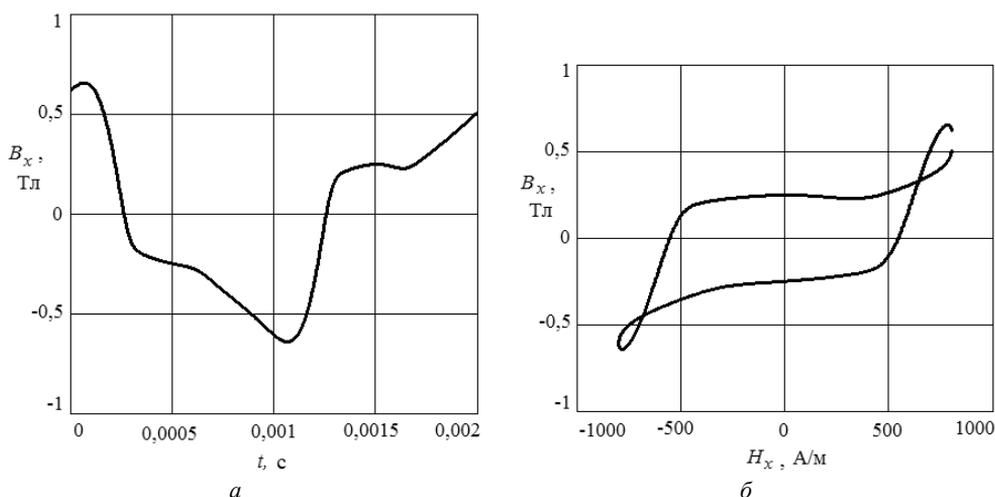


Рис. 7. Кривые вращательного перемагничивания на частоте 500 Гц, полученные при решении системы уравнений (25) с тремя дифференциальными уравнениями

Сравнительно другой характер имеют рассмотренные кривые, если в дифференциальном уравнении для угла нутации ϑ выдерживается симметричный характер намагничивания по осям x и z (задействована кривая намагничивания и по оси x). Процесс намагничивания определяется следующими тремя дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} = \alpha_z \gamma \{ [H_{xm} \cos \omega t - H_0(B)] \cos \vartheta - [H_{zm} \sin \omega t - H_0(B)] \sin \vartheta \}, \\ \frac{dB}{dt} = -\gamma B_s \{ \alpha_x [H_{xm} \cos \omega t - H_0(B)] \cos \vartheta - \alpha_z [H_{zm} \sin \omega t - H_0(B)] \sin \vartheta \} \sin \vartheta, \\ \frac{dB_x}{dt} = \gamma B_s \{ \alpha_x [H_{xm} \cos \omega t - H_0(B)] \cos \vartheta - \alpha_z [H_{zm} \sin \omega t - H_0(B)] \sin \vartheta \} \cos \vartheta. \end{cases} \quad (28)$$

Результаты решения системы уравнений (28) для предыдущего вращательного режима перемагничивания (частота 500 Гц; $\alpha_x = 4,6 \cdot 10^{-6}$; $\alpha_z = 9 \cdot 10^{-5}$; $H_{xm} = H_{zm} = 800$ А/м) приведены на рис. 8.

Основные отличия полученных кривых от предыдущих следующие: зависимость $\vartheta(t)$ стала отличаться от линейной; у кривой $B_x(t)$ уменьшились максимальные значения; у гистерезисной петли $B_x(H_x)$ возросли амплитуда индукции и коэрцитивная сила.

Если к новой версии дифференциального уравнения для угла нутации ϑ (с тем же начальным значением $\vartheta(0) = 1,8$ рад, что и в предыдущих системах) добавить упомянутое выше уравнение (24)

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} = \alpha_z \gamma \{ [H_{xm} \cos \omega t - H_0(B)] \cos \vartheta - [H_{zm} \sin \omega t - H_0(B)] \sin \vartheta \}, \\ B_x = B_s \sin \vartheta, \end{cases} \quad (29)$$

то кривые магнитной индукции B_x (рис. 9), полученные из решения этой системы уравнений (29), будут существенно отличаться от аналогичных кривых, показанных на рис. 6.

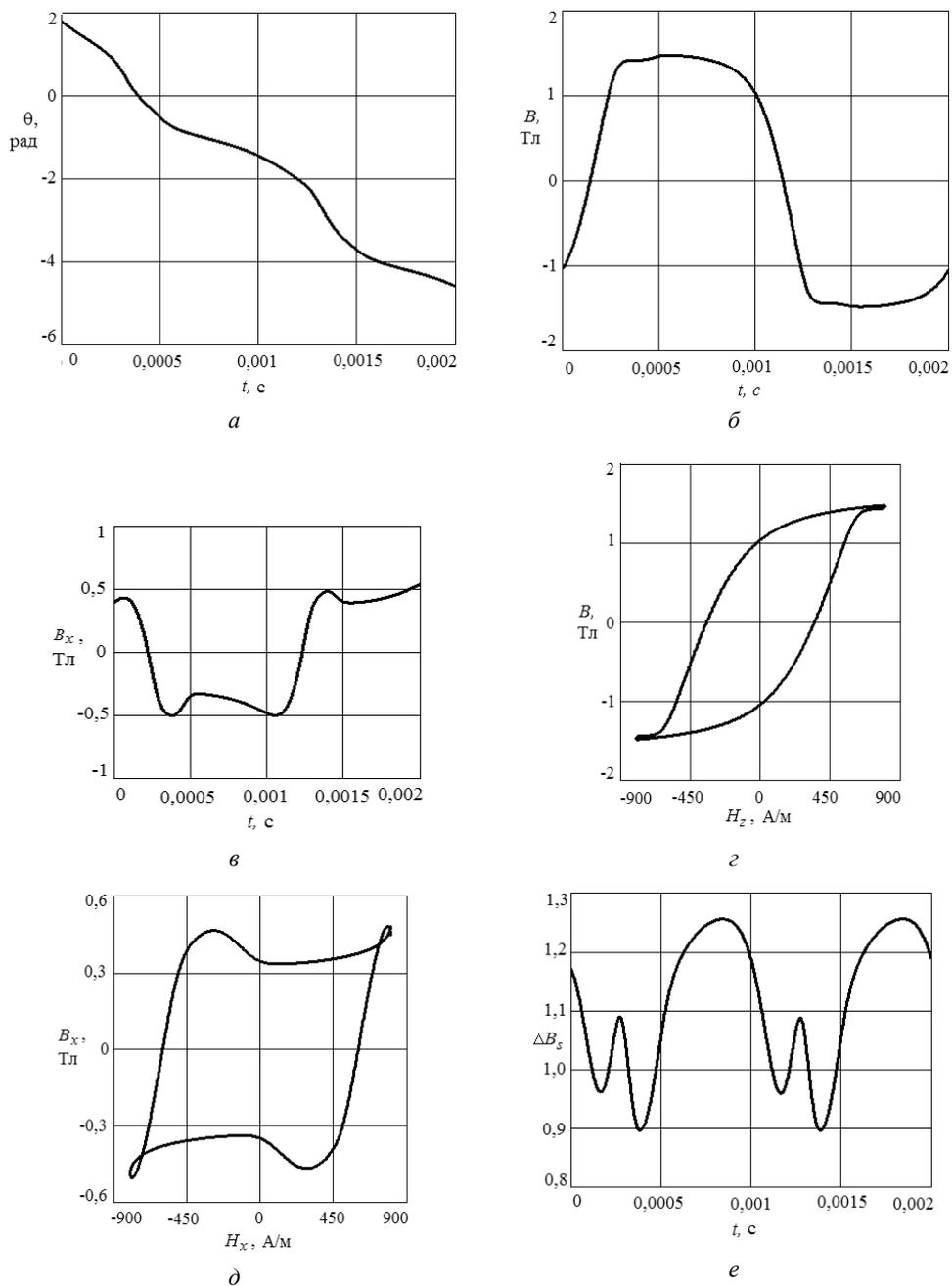


Рис. 8. Кривые вращательного перемagnичивания на частоте 500 Гц, полученные при решении системы уравнений (28) с тремя дифференциальными уравнениями

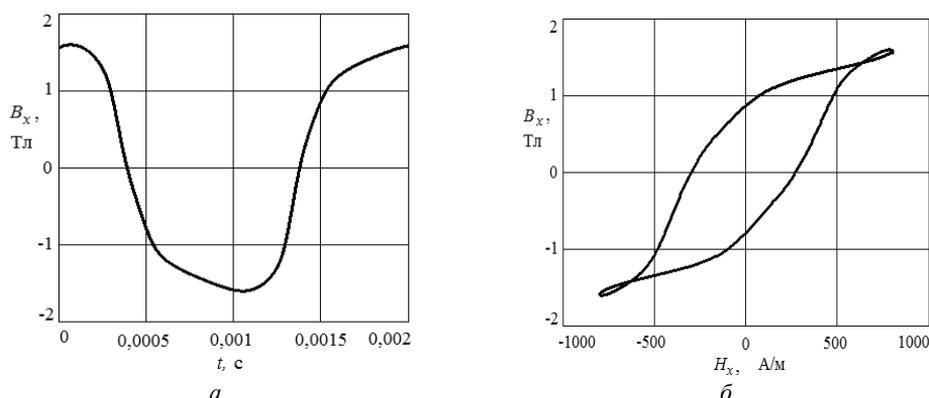


Рис. 9. Кривые вращательного перемагничивания на частоте 500 Гц, полученные при решении системы уравнений (29)

Видим, что зависимость $B_x(t)$ стала отличной от гармонической, а гистерезисная петля $B_x(H_x)$ перестала быть эллипсом, приобретя сплюснутость у вершин.

Полученные уравнения, как отмечалось выше, соответствуют однодоменному магнетика. В структуре из многих доменов (их размеры для железа равны примерно 10^{-3} см) границы между ними являются специфическими образованиями (стенками Блоха [2, 8]) с толщиной $(0,25 \div 0,35) \cdot 10^{-5}$ см.

У размагниченного магнетика направления векторов намагниченности доменов, имеющих общую границу, образуют углы в 90 или 180° [8, 12]. Между краями стенки Блоха совершается плавный поворот вектора намагниченности от направления на одном крае стенки до направления на другом (рис. 10).

При приложении слабого намагничивающего внешнего поля векторы намагничивания стенок Блоха обратимо повернутся в его направлении, причём только тех стенок, у которых направления намагниченности их доменов образуют наименьшие углы с направлением внешнего поля.

Векторы намагниченности этих доменов одновременно также поворачиваются в направлении поля. Происходящий процесс равенсильен увеличению объёма названных доменов или смещению их стенок.

При дальнейшем увеличении внешнего магнитного поля векторы \mathbf{M} уже всех других доменов начинают необратимый поворот в направлении вектора \mathbf{H} .

Видим, что и во многодоменной структуре магнетика процессы его намагничивания могут описываться дифференциальными уравнениями (11), (21). Поэтому другие варианты математического моделирования динамических процессов в магнетике, ориентированные на изменение объёмов доменов из-за смещения их границ, при опытной проверке привели примерно к таким же результатам, что и на основе теории прецессионно-нутационного вращения вектора \mathbf{M} [5].

Выводы. 1. Уравнения Ландау – Лифшица, используемые для описания явлений перемагничивания в ферромагнетиках с многодоменной структурой, дают качественное и количественное приближение к опытным данным.

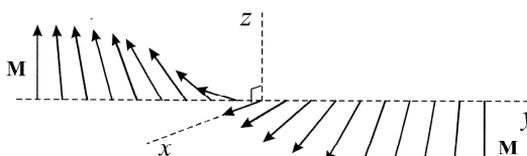


Рис. 10. Поворот вектора намагниченности \mathbf{M} в стенке Блоха

2. На их основе возможно формирование математических моделей переменного, переменного-вращательного и вращательного перемагничивания электротехнических сталей, наблюдаемого в сердечниках электромеханических устройств.

Литература

1. Амелин С.А., Новиков А.А., Строев К.Н., Строев Н.Н. Модификация модели Джилса – Атертона для учёта частотных свойств ферромагнетиков // *Электричество*. 1995. № 11. С. 60–63.
2. Бозорт Р. Ферромагнетизм: пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 784 с.
3. Гусев О.В. Моделирование слабых эффектов наведенной магнитной анизотропии на основе диаграммы Прейзаха: канд. ... дис. канд. физ.-матем. наук. Рыбинск, 2009.
4. Пирогов А.И., Хмарук О.Н., Шамаев Ю.М. Магнитные сердечники в информатике. М.: Изд-во МЭИ, 1996. 339 с.
5. Пирогов А.И., Шамаев Ю.М. Магнитные сердечники для устройств автоматики и вычислительной техники. М.: Энергия, 1973. 264 с.
6. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969. 352 с.
7. Поливанов К.М. Ферромагнетики. Основы теории технического применения. М.: Госэнергоиздат, 1957.
8. Рейнбот Г. Технология и применение магнитных материалов: пер. с нем. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. 339 с.
9. Скрацкий Г.В. Ещё раз об уравнении Ландау – Лифшица // УФН. 1984. Т. 144, вып. 4.
10. Тугай Ю.И., Бесараб А.Б. Модель электромагнитного трансформатора напряжения для исследования феррорезонансных процессов // *Наукові праці ВНТУ*. 2014. № 4. С. 1–5.
11. Холоднокатаные электротехнические стали: справ. изд. / Б.В. Молотилова, Л.В. Миронов, А.Г. Петренко и др.; под ред. Б.В. Молотилова. М.: Металлургия, 1989. 168 с.
12. Шамсутдинов М.А., Назаров В.Н., Харисов А.Т. Введение в теорию доменных стенок и солитонов в ферромагнетиках. Уфа: БашГУ, 2010. 148 с.
13. Шуйский В.П. Расчёт электрических машин: пер. с нем. Л.: Энергия, 1968. 732 с.
14. Appino C., Fiorillo F., Rietto A.M. The energy loss komponents under alternating, elliptical and circular flux in nonoriented alloys. In: Proc. of 5th intern workshop on 2D magnetization problems. Grenoble, 1997, pp. 55–61.
15. Bertotti G. General properties of power losses in soft ferromagnetic materials. *IEEE Trans. On Magn.*, 1988, vol. 24, pp. 621–630.
16. Bertotti G. Hysteresis in Magnetism. Boston, Academic Press, 1998.
17. Chevalier T., Kedous-Labouc A., Cornut B., Cester C. Estimation of magnetic loss in an induction motor fed with sinusoidal supplu using a finite element software and a new approach to dynamic hysteresis. *IEEE Trans.*, 1999, vol. 35, pp. 3400–3402.
18. Jiles D.C., Atherton D.L. Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1986, vol. 61, pp. 48–60.
19. Permiakov V., Dupr e L., Makaveev D., Melkebeek J. Dependence of power losses on tensile stress for Fe-Si nonoriented steel up to destruction *J. Appl. Phys.*, 2002, vol. 91, May.

АФАНАСЬЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ – доктор технических наук, профессор кафедры автоматики и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (afan39@mail.ru).

A. AFANASYEV

HYSTERESIS PHENOMENA IN ELECTRICAL STEEL

Key words: Landau-Lifshitz equation, variable, rotation and variable-rotation reversal.

On the base of solution of the Landau-Lifshitz equation for single domain structure of magnetic, there are offered formulas for computation of hysteresis phenomenas under variable, rotational and variable-rotational remagnetization of electrical steel. There are considered calculating curves of nutation of magnetization vector, the hysteresis loops underlongitudinal and transverse harmonical effects of external magnetic field, taking into account its structure under statical and symmetrical field. There is discussing opportunities of using obtained equations for multi-domain ferromagnetic.

References

1. Amelin S.A., Novikov A.A., Stroev K.N., Stroev N.N. *Modifikatsiya modeli Dzhilsa – Atertona dlya ucheta chastotnykh svoystv ferromagnetikov* [The Modification to models Dzhilsa – Atertona for account frequency characteristic ferromagnetic]. *Elektrichestvo* [Electric Power], 1995, no. 11, pp. 60–63.
2. Bozorth R.M. *Ferromagnetism*. Toronto, New York, London, 1951 (Russ. ed.: *Ferromagnetizm*. Moscow, 1956, 784 p.).
3. Gusev O.V. *Modelirovanie slabykh effektov navedennoi magnitnoi anizotropii na osnove diagrammy Preizakha: dis. ... kand. fiz.-matem. nauk* [Modeling weak effect directed magnetic anisotropy on base of the diagram Preyzaha. Doct. Diss.] Rybinsk, 2009.
4. Pirogov A.I., Khmaruk O.N., Shamaev Yu.M. *Magnitnye serdechniki v informatike* [The Magnetic core in informatics]. Moscow, MEI Publ., 1996, 339 p.
5. Pirogov A.I., Shamaev Yu.M. *Magnitnye serdechniki dlya ustroystv avtomatiki i vychislitel'noi tekhniki* [The Magnetic core for device of the automation and computing machinery]. Moscow, Energiya Publ., 1973, 264 p.
6. Polivanov K.M. *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki. Ch. 3. Teoriya elektromagnitnogo polya* [The Theoretical bases electrical engineers. Part 3: The Theory of the electromagnetic field]. Moscow, Energiya Publ., 1969, 352 p.
7. Polivanov K.M. *Ferromagnetiki. Osnovy teorii tekhnicheskogo primeneniya* [The Ferromagnetics. The Bases to theories of the technical using]. Moscow, Gosenergoizdat Publ., 1957.
8. Reinboth H. *Technologie und Anwendung Magnetischer Werkstoffe*. Berlin, Verlag Technik, 1963 (Russ. ed.: Reinbot G. *Tekhnologiya i primenenie magnitnykh materialov*. Moscow, Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1963. 339 p.).
9. Skrotskii G.V. *Eshche raz ob uravnenii Landau – Lifshitsa* [Once again about equation Landau-Lifshica]. *UFN*, 1984, vol. 144, iss. 4.
10. Tugai Yu.I., Besarab A.B. *Model' elektromagnitnogo transformatora napryazheniya dlya issledovaniya ferrozonansnykh protsessov* [The Model of the electromagnetic transformer of the voltage for study ferrozonans processes]. *Naukovi pratsi VNTU*, 2014, no. 4, pp. 1–5.
11. Molotilov B.V., Mironov L.V., Petrenko A.G. et al. *Kholodnokatanye elektrotekhnicheskie stali: sprav. izd.* [Holodnokatanye electrical become. Reference ed.]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1989, 168 p.
12. Shamsutdinov M.A., Nazarov V.N., Kharisov A.T. *Vvedenie v teoriyu domennykh stenok i solitonov v ferromagnetikakh* [Introduction to theory domain wall and solitons in ferromagnetic]. Ufa, 2010, 148 p.
13. Shuiskii V.P. *Raschet elektricheskikh mashin* [Calculation of electrical machines]. Leningrad, Energiya Publ., 1968, 732 p.
14. Appino C., Fiorillo F., Rietto A.M. The energy loss komponents under alternating, elliptical and circular flux in nonoriented alloys. Proc. of 5th Int. Workshop on 2D magnetization problems. Grenoble, 1997, pp. 55–61.
15. Bertotti G. General properties of power losses in soft ferromagnetic materials. *IEEE Trans. On Magn.*, 1988, vol. 24, pp. 621–630.
16. Bertotti G. *Hysteresis in Magnetism*. Boston, Academic Press, 1998.
17. Chevalier T., Kedous-Labouc A., Cornut B., Cester C. Estimation of magnetic loss in an induction motor fed with sinusoidal supplu using a finite element software and a new approach to dynamic hysteresis. *IEEE Trans.*, 1999, vol. 35, pp. 3400–3402.
18. Jiles D.C., Atherton D.L. Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1986, vol. 61, pp. 48–60.
19. Permiakov V., Dupr'e L., Makaveev D., Melkebeek J. Dependence of power losses on tensile stress for Fe-Si nonoriented steel up to destruction. *J. Appl. Phys.*, 2002, vol. 91, May.

AFANASYEV ALEXANDER – Doctor of Technical Sciences, Professor of Management and Computer Science in Technical Systems Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

Ссылка на статью: Афанасьев А.А. Гистерезисные явления в электротехнической стали // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 15–29.

УДК 621.311.1

ББК 31.279

Э. АЮУРЗАНА, М.И. ПЕТРОВ, А.А. КУЗЬМИН

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ДУГОГАСЯЩИХ РЕАКТОРОВ
В УЛАН-БАТОРСКИХ ГОРОДСКИХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ 6-10 КВ**

Ключевые слова: дугогасящие реакторы с подмагничиванием, РОУМ, WF-PXB, система автоматической настройки катушки, однофазное замыкание на землю, гармоники в токе ОЗЗ, расстройка компенсации.

По результатам натурных исследований получены фактические эксплуатационные характеристики современных дугогасящих реакторов с подмагничиванием типа РУОМ и WF-PXB. Осциллографированы переходные процессы в остаточном токе и токе компенсации при проведении опыта однофазного замыкания на землю в сети с компенсированной нейтралью. Реализована комплексная методика оценки работоспособности системы заземления нейтрали. В результате исследований определены фактические величины: расстройки компенсации, содержания высших гармоник как остаточного тока замыкания на землю, так и тока реактора.

В настоящее время накоплен большой мировой опыт эксплуатации сетей среднего класса напряжения. Согласно статистике около 80% всех повреждений в сетях данного класса напряжения начинаются с появления однофазного замыкания на землю. Одним из основных факторов, влияющих на надежность эксплуатации сети, является режим заземления нейтрали [7]. Хорошо изучено влияние режима заземления нейтрали на характер развития аварии. Однако большая часть опубликованных материалов ссылается на стендовые испытания или же на статистику аварийных повреждений в сети. По разным причинам данные результаты имеют недостаточную точность, поэтому для оценки фактической эффективности работы системы заземления нейтрали необходимо проведение натурных экспериментов в действующей сети с одновременной фиксацией ряда параметров, позволяющих сделать обоснованный вывод.

В городских сетях Монголии применяются изолированный или компенсированный режимы заземления нейтрали. На процесс развития аварии при возникновении однофазного замыкания на землю (ОЗЗ) влияет величина тока замыкания на землю. Нормативные документы определяют величины тока, при которых необходима установка устройств компенсации емкостного тока. Большую часть систем дугогасящих реакторов (ДГР) с плавным регулированием тока компенсации в городских сетях 6-10 кВ Улан-Батора составляют катушки типа РОУМ и WF-PXB. Основной задачей работы системы компенсации является снижение величины тока через место повреждения до нуля (при строгой и точной настройки катушки в резонанс с емкостью сети). На практике через место замыкания протекает небольшой ток активных утечек, а также присутствуют высшие гармоники различной величины, значительно осложняющие процессы при возникновении дугового замыкания [1].

На основе многолетнего опыта обследования систем заземления нейтрали, сформулированы основные критерии качества работы системы компенсации:

1. Для эффективной компенсации емкостного тока ОЗЗ его компенсация должна осуществляться практически мгновенно и точностью не менее 1%, в

момент после прохождения броска емкостного тока. Механизм протекания токов при ОЗЗ достаточно подробно рассмотрен в [6].

2. При возникновении замыкания на фазе не в максимум напряжения 50 Гц ток ДГР содержит затухающую аperiodическую составляющую (длительность затухания до 5-6 периодов промышленной частоты в зависимости от момента возникновения замыкания), которая, естественно, появляется и в токе ОЗЗ. Ток компенсации не должен иметь значительной аperiodической составляющей.

3. Используемые в настоящее время системы компенсации в своей основе имеют устройства преобразования частоты. Применение полупроводниковых устройств может приводить к появлению дополнительных гармонических искажений, протекающих через место повреждения. Система компенсации не должна быть источником высших гармоник.

В настоящее время накоплен значительный опыт эксплуатации систем компенсации типа РУОМ [2–5]. Для рассматриваемых реакторов с подмагничиванием типа РУОМ в нормальном режиме работы сети его индуктивность составляет базовое значение и не совпадает с емкостным сопротивлением сети. При возникновении однофазного замыкания на землю автоматика за счет форсированного увеличения тока подмагничивания подстраивает индуктивность РУОМ к значению емкости сети, определенному этой же автоматикой в режиме отсутствия ОЗЗ.

Для оценки эффективности работы систем заземления сотрудниками улан-баторских городских электрических сетей выбраны в качестве объекта исследования несколько подстанций, в нейтрали которых установлены следующие системы компенсации: РУОМ-300/6,6/√3, РУОМ-480/11/√3, WF-PXB-11/500.

Оценка работы системы заземления нейтрали проводилась по следующим критериям:

- точности настройки автоматики;
- скорости выхода тока компенсации на режим;
- наличию аperiodической составляющей;
- гармоническому составу токов.

Методические подходы к осциллографированию переходных процессов подробно описаны, например, в [8].

Оценка эффективности работы системы типа РУОМ. На рис. 1 представлена осциллограмма опыта однофазного замыкания на землю в сети 10 кВ с компенсированной нейтралью, катушка РУОМ-480/11/√3. На осциллограммах: ток РУОМ – черный (СН5), ток ОЗЗ – серый (СН6). Длительность «металлического» ОЗЗ при проведении опыта ОЗЗ в сети 10 кВ составила 3,06 с. Параметры переходных процессов для опытов металлических ОЗЗ, осциллограммы которых представлены на рис. 1-2 и приведены в таблице.

На рис. 2 приведена характерная осциллограмма изменения тока РУОМ-300/6,6/√3 в процессе ОЗЗ и остаточного тока сети 6 кВ. Длительность «металлического» ОЗЗ в опыте составила 2,26 с. Осциллограмма переходных процессов при «металлическом» ОЗЗ свидетельствует о том, что время выхода тока РУОМ на «установившееся» значение в этом случае составляет 0,5 с, что значительно выше заявленного производителем.

Кроме того, были зафиксированы колебания тока РУОМ частоты 50 Гц около некоторого «среднего» значения даже в установившемся режиме компенсации. Уровень этих колебаний находится в пределах 2-3%.

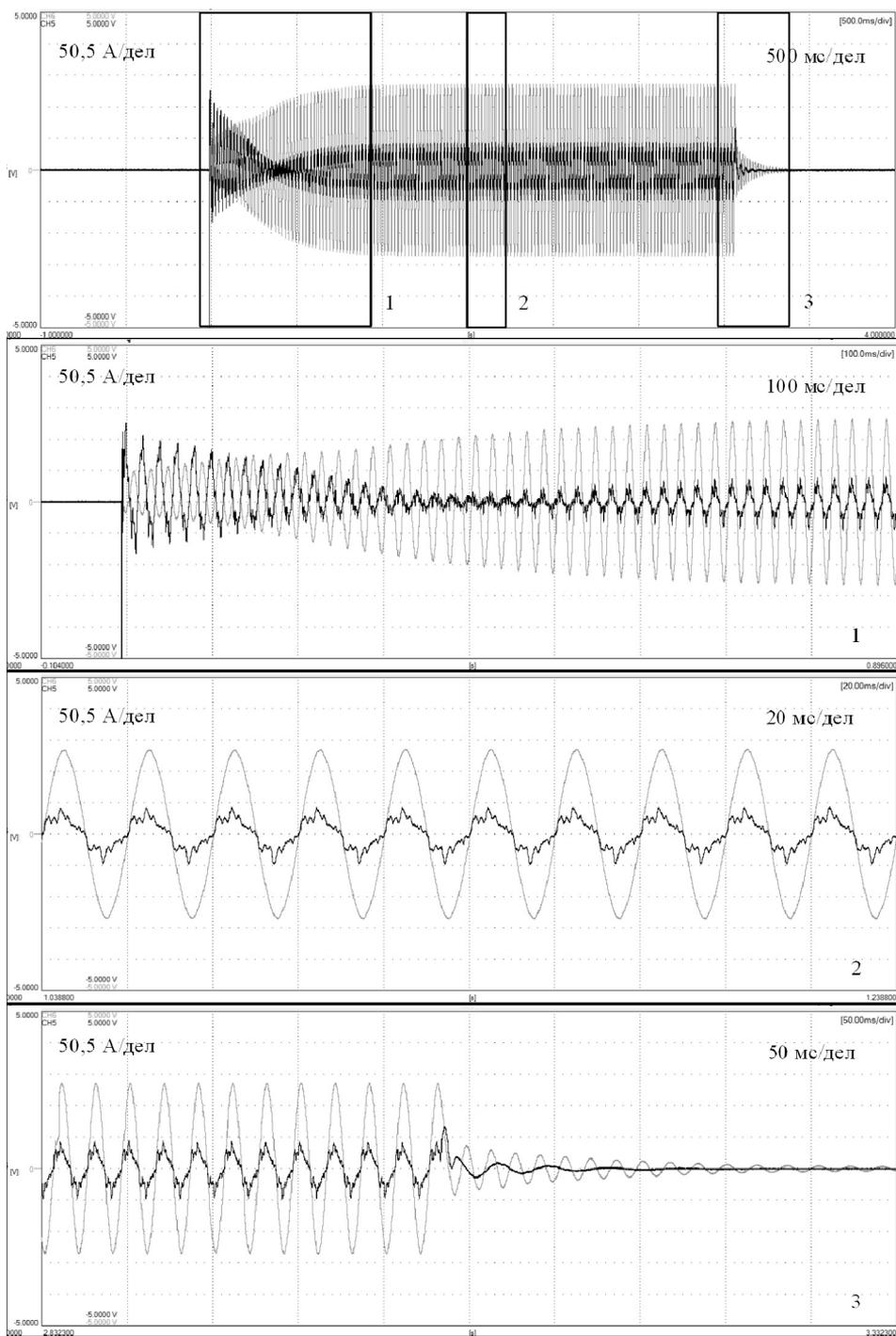


Рис. 1. Осциллограммы фазных напряжений тока РУОМ (черный цвет) и остаточного тока ОЗЗ (серый цвет) при ОЗЗ в сети 10 кВ РУОМ-480/11/√3

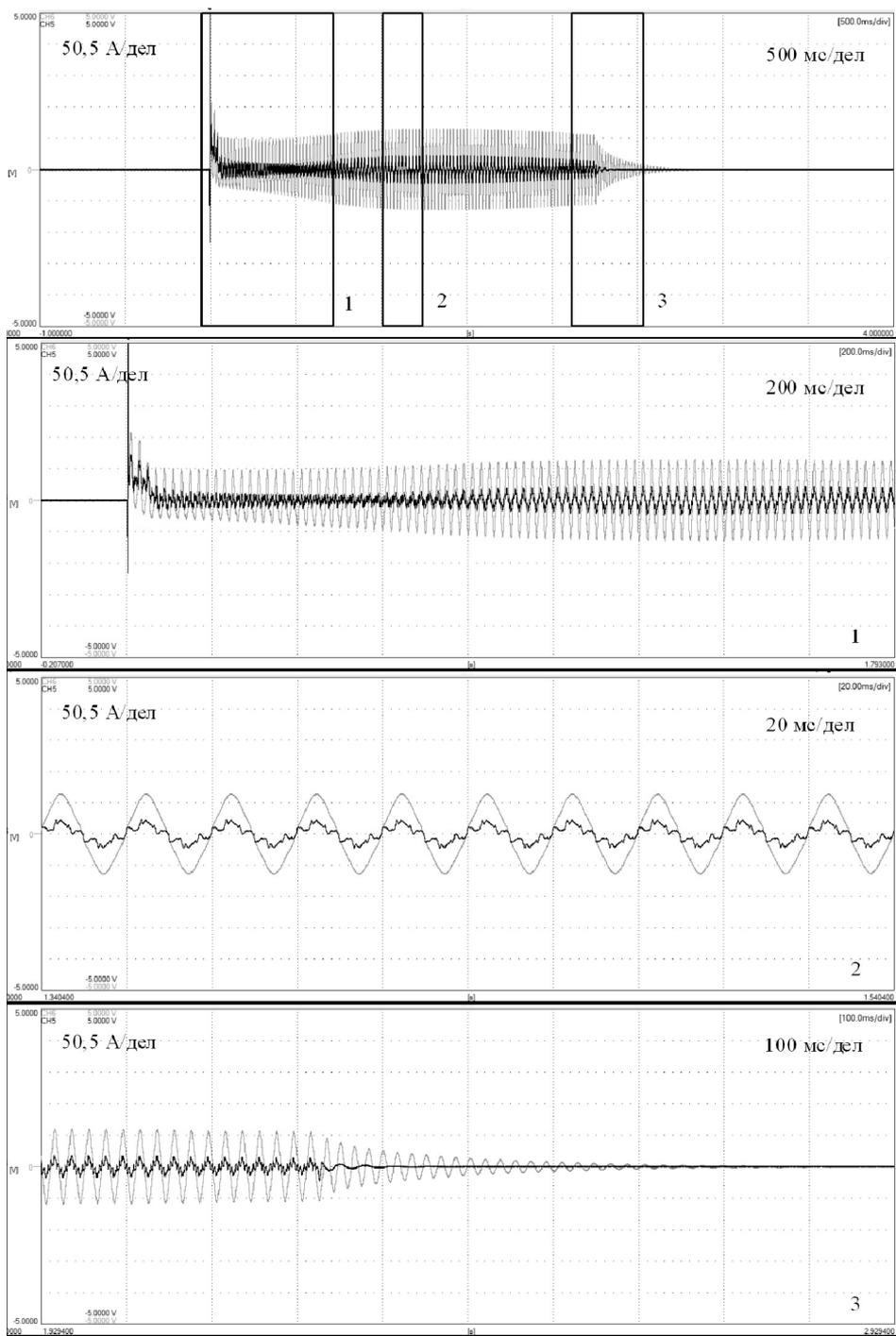


Рис. 2. Осциллограммы фазных напряжений тока РУОМ (черный цвет) и остаточного тока ОЗЗ (серый цвет) при ОЗЗ в сети 6 кВ РУОМ-300/6,6/√3

**Основные параметры, характеризующие процесс «металлического» ОЗЗ
в сети 6-10 кВ с реактором РУОМ**

Осциллограмма	Исследуемая сеть					
Исследуемая система	РУОМ-480/11/ $\sqrt{3}$			РУОМ-300/6,6/ $\sqrt{3}$		
Длительность ОЗЗ, с	3,06			2,26		
Время выхода РУОМ на установившийся режим, с	0,75			0,5		
Точность настройки, %	28			32		
Величина тока 50 Гц, А	$I_{\text{озз}}$	$I_{\text{ост}}$	$I_{\text{дгр}}$	$I_{\text{озз}}$	$I_{\text{ост}}$	$I_{\text{дгр}}$
	74,36	20,58	94,09	31,30	7,78	34,54
Величина высших гармоник в токе, $I_{2-40\text{действ.}}$ А	5,74	5,80	1,22	1,69	3,83	2,28

В результате измерений тока ОЗЗ и тока дугогасящего реактора типа РУОМ в сети 10 кВ и 6 кВ отмечено наличие явно выраженных в сигнале тока РУОМ третьей, пятой и седьмой и других гармоник, которые значительно влияют на гармонический состав остаточного тока замыкания. Суммарный остаточный ток от высших гармоник в точке ОЗЗ для сети 10 кВ в экспериментах превысил величину 5 А.

Оценка эффективности работы системы типа WF-PXB. На осциллограммах: ток компенсации – черный (СН5), ток ОЗЗ – серый (СН6). На рис. 3 представлена осциллограмма опыта однофазного замыкания на землю в сети 10 кВ (в нейтраль включена система компенсации типа WF-PXB-11/500). При однофазном замыкании на землю появляется существенная апериодическая составляющая, насыщенная третьей гармоникой. График изменения первой и третьей гармоник во время опыта однофазного замыкания на землю в токе компенсации представлен на рис. 4 и 5, соответственно. Как видно на рисунках, время выхода катушки на установившийся режим компенсации составило 0,8 с.

Опыт показывает, что настройка реактора WF-PXB в сети 10 кВ некорректна, величина остаточного тока через место замыкания в установившемся режиме составила 89,41 А.

На рис. 3 и 5 хорошо видно, что ток компенсации насыщен высшими гармониками.

Время выхода исследуемых систем заземления нейтрали на установившийся режим компенсации при ОЗЗ может составлять до 0,5-0,8 с и определяется характеристиками ДГР с подмагничиванием и системы автоматической настройки. Реальная расстройка компенсации в сети с реактором может существенно превышать допустимую величину. Так, настройка реактора РУОМ в исследованной сети 6-10 кВ оказалась весьма далека от резонансной: при «металлических» ОЗЗ степень перекомпенсации составляла 28-5%. Зафиксировано наличие явно выраженных в сигнале тока рассматриваемых реакторов 3-й и 5-й гармоник. Измерения остаточного тока ОЗЗ в сети с включенным ДГР с подмагничиванием показали, что гармонический состав первого, а именно – наличие 3-й и 5-й гармоник – определяется главным образом влиянием дугогасящего реактора.

Таким образом, по результатам обследований, эксплуатируемые системы компенсации работают неудовлетворительно.

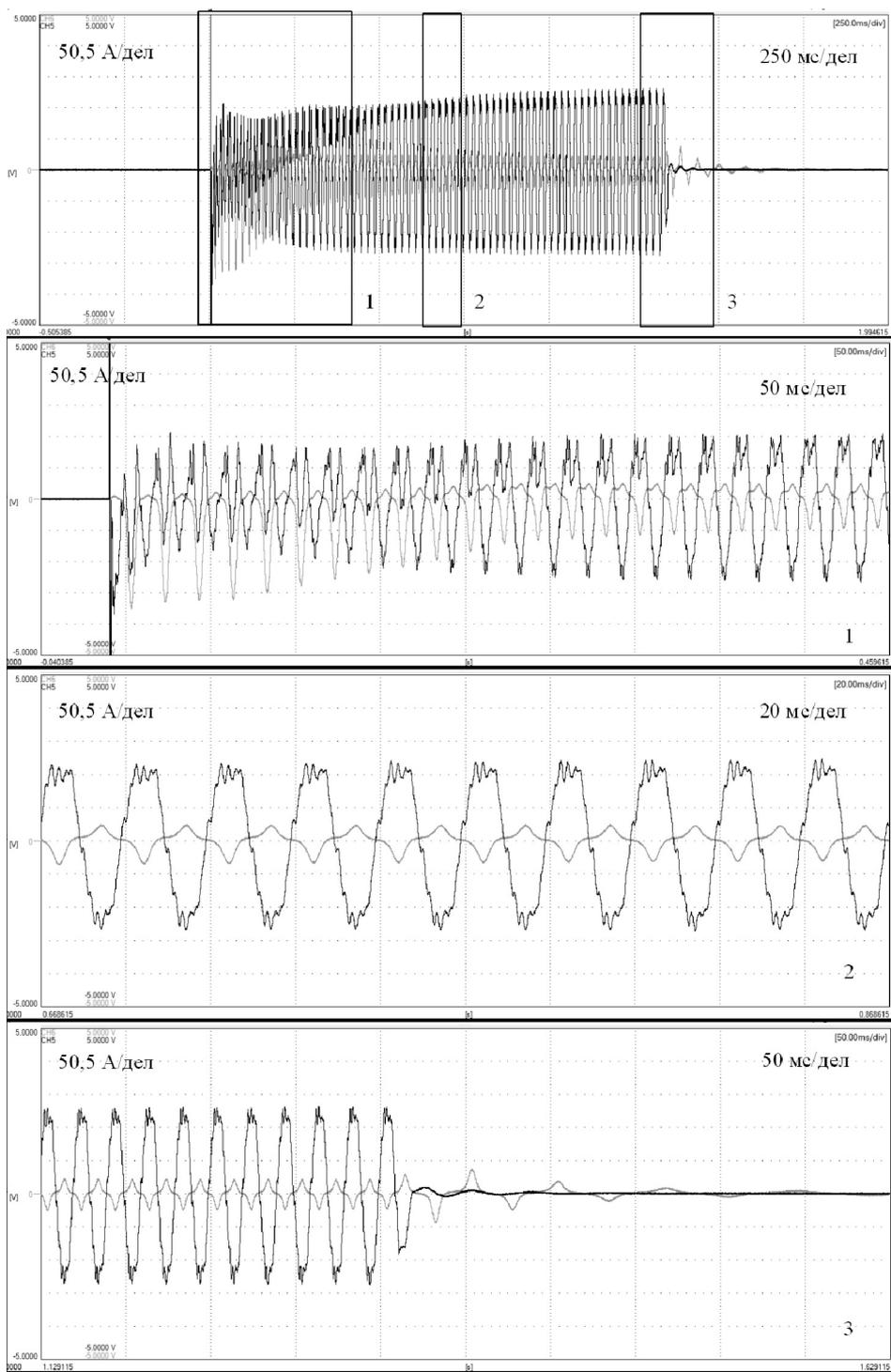


Рис. 3 Осциллограммы фазных напряжений тока WF-PXB (черный цвет) и остаточного тока ОЗЗ (серый цвет) при ОЗЗ в сети 10 кВ WF-PXB-11/500

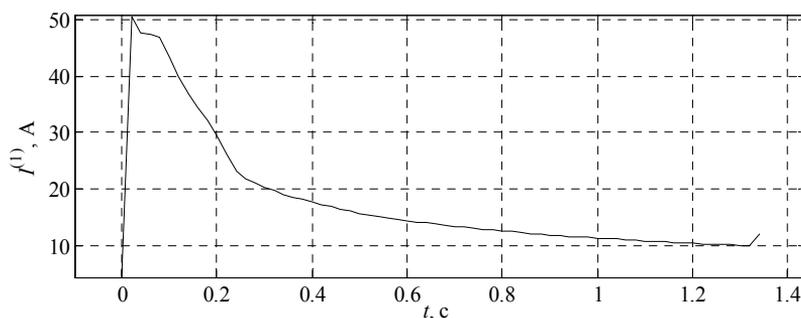


Рис. 4 Характер изменения первой гармоники тока WF-PXB-11/500 в процессе ОЗЗ

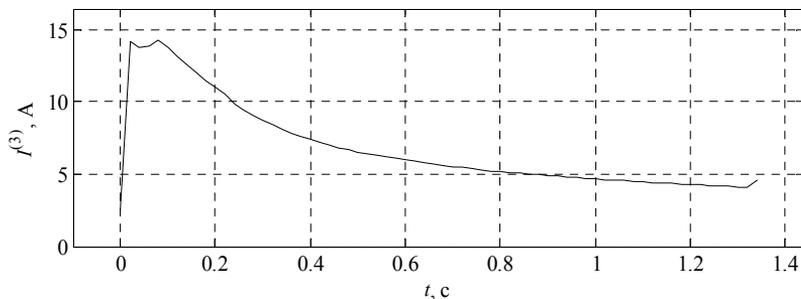


Рис. 5 Характер изменения третьей гармоники тока WF-PXB-11/500 в процессе ОЗЗ

Выводы. 1. В связи с отсутствием четких указаний по вопросу режима заземления нейтрали и выбора оборудования в настоящее время в сети 6-35 кВ эксплуатируется значительное количество различных систем заземления нейтрали. Качество их работы значительно отличается в зависимости от типа устройств, производителя и условий эксплуатации. Для оценки их работоспособности необходимо проведение натурных испытаний в действующих сетях для определения фактических характеристик оборудования.

2. Согласно проведенным исследованиям эксплуатируемые системы компенсации в сети 6-10 кВ Улан-Баторских городских электрических сетей типа РУОМ и WF-PXB работают неудовлетворительно.

Литературы

1. Базуткин В.В., Ларионов В.П., Пинталь Ю.С. Техника высоких напряжений. Изоляция и перенапряжения в электрических системах. 2-е изд. М.: Энергоатомиздат, 1986.
2. Брянецв А.М., Бызылев Б.И., Долгополов С.Г. Результаты сетевых испытаний и опыт эксплуатации дугогасящих реакторов, управляемых подмагничиванием // Электро. 2007. № 5. С. 31–34.
3. Козлов В.Н., Петров М. Дугогасящие реакторы в сетях среднего напряжения. Компенсация емкостных токов замыкания на землю // Новости электротехники. 2012. № 2.
4. Козлов В.Н., Петров М.И. Дугогасящие катушки и автоматика управления ими // Релейная защита и автоматизация. 2010. № 1.
5. Кучеренко В., Сазонов В., Багаев Д. Дугогасящие реакторы в сетях 6-35 кВ. Опыт эксплуатации // Новости электротехники. 2007. № 3.
6. Лихачев Ф.А. Замыкания на землю в сетях с изолированной нейтралью и с компенсацией емкостных токов. М.: Энергия, 1971. 152 с.
7. Обабков В.К. Многокритериальность показателя эффективности функционирования сетей 6–35 кВ и проблема оптимизации режимов заземления нейтрали // Режимы заземления нейтрали сетей 3–6–10–35 кВ: сб. докл. науч.-техн. конф. Новосибирск, 2000. С. 33–41.

8. Ширковец А.И., Ильиных М.В. Методические подходы к осциллографированию процессов при однофазных замыканиях на землю в электрических сетях 6-35 кВ // Научные проблемы Сибири и Дальнего Востока. 2008. Спец. вып. № 1. С. 44–51.

АЮУРЗАНА ЭРДЭНЭБИЛЭГ – инженер-исследователь, производственно-технический отдел, Национальная электропередающая сеть Монголии, Монголия, Улан-Батор (ert1969@yahoo.com).

ПЕТРОВ МИХАИЛ ИВАНОВИЧ – кандидат технических наук, доцент кафедры электроснабжения промышленных предприятий, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (g374mi@yandex.ru).

КУЗЬМИН АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ – ассистент кафедры техники и электрофизики высоких напряжений, Новосибирский государственный технический университет; ведущий научный сотрудник, ООО «Болид», Россия, Новосибирск (kuzmin_a_a@211.ru).

E. AYURZANA, M. PETROV, A. KUZMIN

EXPERIMENTAL STUDY OF PERFORMANCE ARC SUPPRESSION COILS AT THE ULAANBAATAR CITY ELECTRIC NETWORKS OF 6–10 KV

Key words: peterson coils with magnetization, roaming, WF-PXB, the system automatically adjust the coil, single-phase ground fault, harmonic current PTG, detuning compensation.

According to the results of field studies obtained by the actual performance of modern arc suppression reactors magnetization type RUOM and WF-PXB. Oscillograms of transients in the residual current and the current compensation during the experiment of single-phase earth fault in a network with compensated neutral. Implement a comprehensive performance assessment methodology earthing system. The studies to determine the actual value of: mismatch compensation, harmonic content as a residual ground fault current and power reactors.

References

1. Bazutkin V.V., Larionov V.P., Pinal' Yu.S. *Tekhnika vysokikh napryazhenii. Izolyatsiya i perenapryazheniya v elektricheskikh sistemakh. 2-e izd.* [Technics of high pressure. Isolation and surge in electrical systems]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1986.
2. Bryantsev A.M., Byzylev B.I., Dolgopolov S.G. *Rezultaty setevykh ispytaniy i opyt ekspluatatsii dugogasyashchikh reaktorov, upravlyaemykh podmagnichivaniem* [Network test results and operating experience of Peterson coils controlled by the magnetization]. *Elektro*, 2007, no. 5, pp. 31–34.
3. Kozlov V., Petrov M. *Dugogasyashchie reaktory v setyakh srednego napryazheniya. Kompensatsiya emkostnykh tokov zamykaniya na zemlyu. Novosti elektrotekhniki* [Earth faults in networks with insulated neutral and compensation of capacitive currents], 2012, no. 2.
4. Kozlov V.N., Petrov M.I. *Dugogasyashchie katushki i avtomatika upravleniya imi Releinaia zashchita i avtomatizatsiya* [Arc suppression coil and management automation]. [Relay protection and automation], 2010, no. 1.
5. Kucherenko V., Sazonov V., Bagaev D. *Dugogasyashchie reaktory v setyakh 6-35 kV. Opyt ekspluatatsii* [Peterson coils 6-35 kV networks. Experience the experience]. *Novosti elektrotekhniki*, 2007, no. 3.
6. Likhachev F.A. *Zamykaniya na zemlyu v setyakh s izolirovannoi neutral'yu i s kompensatsiei emkostnykh tokov* [Earth faults in networks with insulated neutral and compensation of capacitive currents]. Moscow, Energiya Publ., 1971, 152 p.
7. Obabkov V.K. *Mnogokriterial'nost' pokazatelya effektivnosti funktsionirovaniya setei 6-35 kV i problema optimizatsii rezhimov zazemleniya neutrali* [Multiobjective performance score of 6-35 kV network and the problem of optimization of neutral grounding modes]. *Rezhimy zazemleniya neutrali setei 3-6-10-35 kV: sb. dokl. nauch.-tekhn. konf.* [Proc. of. Sci. Conf. «Earthing 3-6-10-35 kV networks»]. Novosibirsk, 2000, pp. 33–41.

8. Shirkovets A.I., Il'nykh M.V. *Metodicheskie podkhody k ostsillografirovaniyu pro-tsessov pri odnofaznykh zamykaniyakh na zemlyu v elektricheskikh setyakh 6–35 kV* [Methodological approaches to oscillography processes in single-phase earth faults in electric networks of 6–35 kV]. *Nauchnye problemy Sibiri i Dal'nego Vostoka* [Scientific problems of Siberia and Far East], 2008, Special issue, no. 1, pp. 44–51.

AYUURZANA ERDENEBILEG – Engineering Research, Production and Technical Department, National Electricity Transmission Network of Mongolia, Mongolia, Ulaanbaatar (ert1969@yahoo.com).

PETROV MIKHAIL – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Industrial Enterprises Power Supply Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (g374mi@yandex.ru).

KUZMIN ALEXEY – Post-Graduate Student of the Technology and Electrophysics High Voltages Department, Novosibirsk State Technical University, Leading Researcher of «Bolid» LTd, Russia, Novosibirsk (kuzmin_a_a@211.ru).

Ссылка на статью: Аюурзана Э., Петров М.И., Кузьмин А.А. Экспериментальное исследование эффективности работы дугогасящих реакторов в Улан-Баторских городских электрических сетях 6-10 кв // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 30–38.

УДК 681.586.48

ББК 32.873

И.Ю. БЫЧКОВА, А.В. БЫЧКОВ, Л.А. СЛАВУТСКИЙ

**ИМПУЛЬСНЫЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ КОНТРОЛЬ
СТРАТИФИКАЦИИ ВОЗДУХА НАД НАГРЕТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Ключевые слова: ультразвук, импульсные измерения, фазово-модулированные сигналы, процессы теплопереноса, конвекция.

Для контроля стратификации и конвективных потоков воздуха над источниками тепла предлагаются аппаратные средства и методика импульсных ультразвуковых измерений. Описана схема и результаты экспериментальных измерений, полученные при анализе задержки прямого и отраженного от нагретой металлической поверхности ультразвуковых сигналов. Измерения проводятся при использовании фазовой модуляции сигналов с последующей корреляционной обработкой при помощи микропроцессорных средств. Разница в условиях распространения прямого и отраженного от поверхности ультразвуковых сигналов позволяет получить информацию о стратификации воздуха в переходном (разгонном) участке конвективного потока над нагретой поверхностью.

Задачи контроля стратификации и конвективных потоков воздуха над источниками тепла актуальны для самых разных областей науки и техники [7, 10, 11], в частности – теплоэнергетики. Адекватное моделирование конвекции, процессов тепло- и массопереноса вблизи источников тепла возможно только численными методами [2, 10]. При этом существенные затруднения возникают при определении граничных и начальных условий для расчетов. Для определения этих условий приходится учитывать очень большое количество факторов и делать ряд допущений. Для инженерных расчетов используются полуэмпирические модели [10]. Стратификация воздуха и его потоки носят случайно-неоднородный, турбулентный характер, что придает особую важность развитию экспериментальных методов контроля [8, 12]. В настоящей работе предлагаются методика измерений и оценки параметров стратифицированной газовой среды ультразвуковыми методами.

Большинство изготовителей ультразвуковых (УЗ) импульсных приборов в качестве предела разрешающей способности прибора используют величину, соответствующую половине длины УЗ волны, однако реальная погрешность оказывается значительно выше. Форма УЗ импульса зависит не только от характеристик приемо-передающих преобразователей, но и от условий распространения и отражения акустических волн в среде [5]. Результирующий сигнал на входе приемника есть сумма сигналов, дошедших до приемника различными путями и с различной задержкой, что сильно влияет на точность измерений, особенно при наличии стратификации среды [9]. Использование линейно-частотно- или фазово-модулированных (ЛЧМ и ФМ) сигналов в теории локации позволяет осуществлять их эффективный корреляционный прием, поскольку малая ширина автокорреляционной функции такого сигнала дает возможность увеличить точность определения временной задержки импульса [4]. Авторами показана возможность увеличить разрешение УЗ приборов за счет использования ФМ сигналов и их цифровой корреляционной обработки.

Импульсные ультразвуковые измерения временной задержки при многолучевом распространении позволяют оценить пространственные параметры стра-

тификации газа [3, 6]. Измерения проводятся при использовании фазовой модуляции сигналов с последующей корреляционной обработкой при помощи микропроцессорных средств. Это дает возможность значительно повысить разрешающую способность ультразвуковых измерений и показать, что разница в условиях распространения прямого и отраженного от поверхности ультразвукового сигнала позволяет получить информацию о стратификации воздуха в переходном (разгонном) участке конвективного потока над нагретой поверхностью.

Описание импульсного ультразвукового прибора. Блок-схема устройства для импульсных ультразвуковых измерений, а также осциллограммы, объясняющие его функционирование, показаны на рис. 1. Схема является типичной для устройств данного класса. Она содержит следующие элементы: ГИ – генератор импульсов, ФИП – формирователь импульсов последовательности, БУ – блок управления, БЗП – блок задания последовательности, ЭК – электронный ключ, УИ – ультразвуковой излучатель, УП – ультразвуковой приемник, ФПП – фильтр промышленных помех, УН – усилитель приемного сигнала, АЦП – аналого-цифровой преобразователь, БА – блок анализатора, ОСЦ – осциллограф (рис. 1, а).

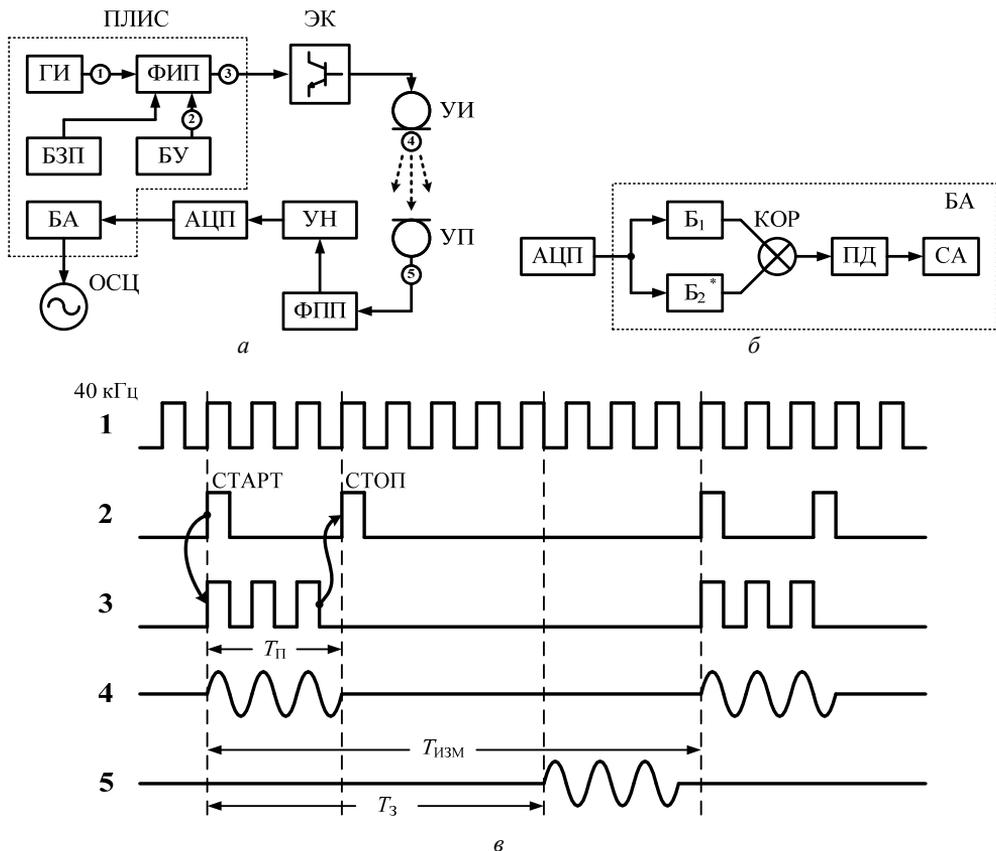


Рис. 1. Функционирование устройства:
а – блок-схема УЗ измерительного устройства; б – блок-схема анализатора;
в – осциллограммы работы

Генератор импульсов ГИ формирует сигнал несущей частоты 40 кГц (осц. 1). При появлении импульса «старт» (осц. 2) от блока управления БУ в блоке ФИП начинается формирование последовательности импульсов (осц. 3). Длительность пакета импульсов составляет $T_{\Pi} = 1$ мс, тип передаваемого пакета характеризуется числовой последовательностью 0001101 (код Баркера 7-го порядка). Данные параметры определяются настройками в блоке задания последовательности БЗП. После того как пакет полностью сформирован, по истечении времени $T_{\Pi} = 1$ мс ФИП завершает процесс формирования последовательности импульсом «стоп» (осц. 2). Период повторения пакетов составляет $T_{\text{изм}} = 0,5$ с, что задается настройками в блоке управления БУ. При помощи выходного электронного ключа ЭК, согласно сгенерированной последовательности, коммутируется цепь ультразвукового излучателя, который излучает звуковую волну (осц. 4).

Ультразвуковой сигнал принимается УП (осц. 5) через время «задержки» T_3 , пропорциональное расстоянию между УИ и УП. Сигнал фильтруется ФПП и усиливается УН. Далее сигнал поступает на АЦП и уже в цифровом виде передается в блок анализатора БА. Схематически БА показан на рис. 1, б. Цифровые значения принятого сигнала могут сохраняться в одном из буферов Б1 и Б2. Сигнал в буфере Б2 используется как эталонный для корреляционной обработки. Содержимое обоих буферов поэлементно перемножается в корреляторе (КОР), тем самым формируя функцию взаимной корреляции приемного и эталонного сигналов. Далее при помощи пикового детектора (ПД) выделяются максимумы корреляционной функции и определяются моменты времени, им соответствующие. Статистический анализатор (СА) производит статистическую обработку результатов. Блоки ГИ, ФИП, БУ, БЗП, БА реализованы на микросхеме ПЛИС XC3S500E фирмы Xilinx (рис. 1, а).

Описание эксперимента. Схема лабораторной установки на основе описанного выше устройства ультразвукового прибора приведена на рис. 2, а. Приемо-передающее устройство ППУ схематически отражает в себе все функциональные блоки устройства (рис. 1, а). Ультразвуковые преобразователи с резонансными частотами 40 кГц располагаются на расстоянии $L = 47$ см и высоте $H = 20$ см над плоской стальной плитой размером $40 \times 20 \times 1,5$ см. Плиту нагревали до температуры $T \approx 180^\circ\text{C}$. Преобразователи имеют широкую диаграмму направленности (порядка 60°), и в общем случае сигнал на входе приемника представляет собой суперпозицию двух сигналов: прямого и отраженного. Согласно диаграммам направленности преобразователей, мощность излучения боковых лучей отличается от мощности прямого луча примерно на 5 дБ. Поэтому для увеличения чувствительности системы к отраженному сигналу оба преобразователя были повернуты примерно на 25° (рис. 2, а).

Обработка сигналов проводилась по результатам трехсот измерений, которые были произведены по мере нагревания плиты. Оцифровка ультразвуковых сигналов осуществлялась с частотой 625 кГц, что позволяет анализировать их форму и корреляционные функции. Предварительно перед включением электрической плиты на высоте 50 см от поверхности и прямом расположении преобразователей был записан эталонный сигнал, необходимый для последующей корреляционной обработки. На рис. 3 приведены форма эта-

лонного сигнала и форма сигнала при нагретой до 100°C плите, а также их взаимная корреляционная функция $R(t)$. В корреляционной функции возникают два максимума, временная задержка между которыми соответствует задержке между прямым и отраженным сигналами (τ). Максимумы корреляционной функции вычисляются в ПД по значениям её огибающей.

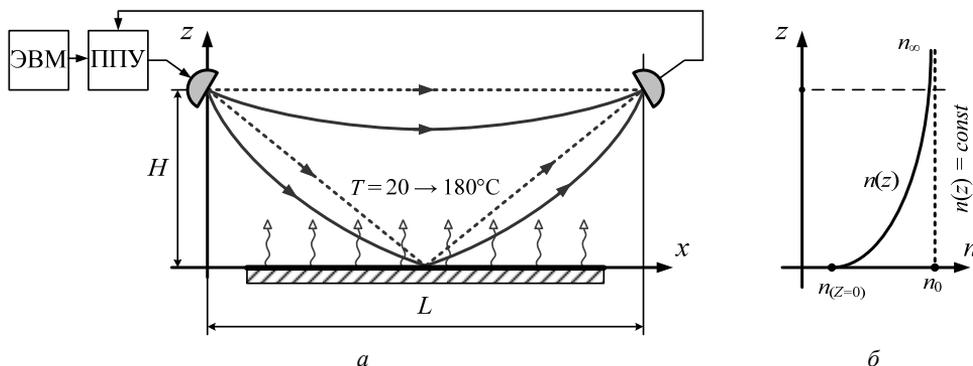


Рис. 2. Схема лабораторной установки и траектории распространения лучей в однородной и неоднородной среде (а), зависимость приведенной скорости звука (акустического показателя преломления) от координаты (б)

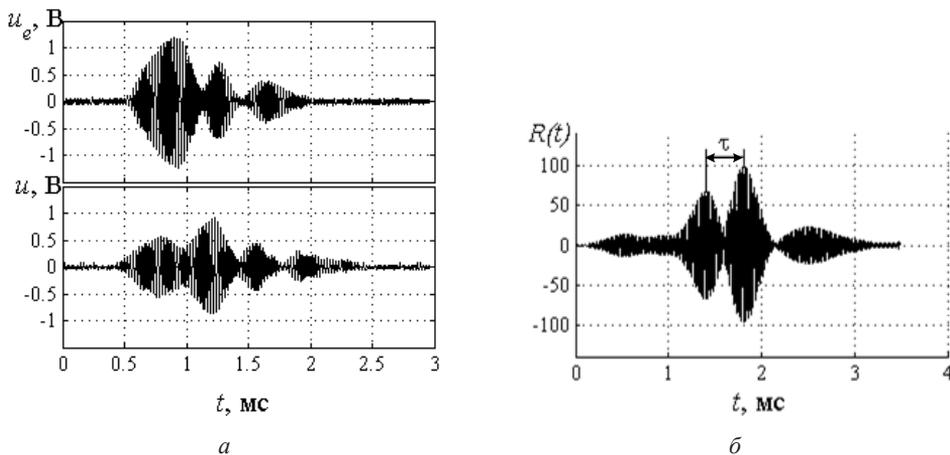


Рис. 3. Форма эталонного сигнала и форма сигнала при нагретой до 100°C плите (а), а также их взаимная корреляционная функция (б)

По мере роста температуры плиты до $T \approx 180^{\circ}\text{C}$ скорость звука вблизи поверхности увеличивается с 343 м/с до примерно 440 м/с . В связи с этим среда становится слоисто-неоднородной по вертикали, и, следовательно, углы наклона прямого и отраженного лучей по мере распространения в среде изменяются, т.е. траектория луча становится изогнутой (рис. 2, а). Уравнение траектории луча выводится из закона Снеллиуса для плоскостростой среды [1]:

$$x = \int_0^z \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n(z)^2 - \sin^2 \theta_0}} dz. \quad (1)$$

Если рассматривать распространение сигналов в плоскости xOz , то зависимость показателя преломления от координаты z , в направлении которой среда неоднородна, будет иметь экспоненциальный вид (рис. 2, б). Зная граничные значения показателя преломления (в приповерхностном слое и на уровне преобразователей), можно построить семейство зависимостей показателя преломления от координаты z (рис. 4).

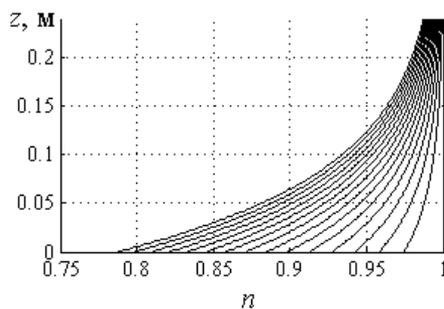


Рис. 4. Семейство кривых $n(z)$

При увеличении температуры плиты скорость звука в приповерхностном слое возрастает, и, соответственно, уменьшается задержка τ . Средняя величина этой задержки может служить для количественной оценки температурного профиля воздуха над нагретой поверхностью, а также для оценки неоднородности конвективного потока воздуха.

Фаза (задержка) из решения уравнения эйконала для плоскостройной среды запишется следующим образом [1]:

$$\Psi = x \sin \theta_0 \pm \int_0^z \sqrt{n(z)^2 - \sin^2 \theta_0} dz. \quad (2)$$

Знак перед корнем определяется направлением распространения луча (в положительном или отрицательном направлениях оси z).

Если использовать экспоненциальную форму зависимости $n(z)$, когда температура на уровне плиты меняется от 20 до 180° , а на уровне датчиков — от 20 до 32° , то семейство кривых $n(z)$ будет иметь вид рис. 4.

Зависимость временной задержки между прямым и отраженным сигналами от температуры среды может быть рассчитана с использованием (1) и (2).

Анализ экспериментальных результатов. На рис. 5 приведены расчетная и экспериментальная зависимости временной задержки между прямым и отраженным от нагретой поверхности ультразвуковыми сигналами от температуры поверхности. Как видно из рис. 5, поведение экспериментальной и теоретической зависимости при температурах $T < 100^\circ\text{C}$ хорошо согласуется, что может служить доказательством адекватности использованной модели для этого диапазона температур. С увеличением температуры существенно увеличиваются флуктуации временной задержки между ультразвуковыми сигналами, что связано со случайной пространственно-временной изменчивостью скорости звука в конвективном тепловом потоке. Случайные изменения временной задержки τ очень значительны, флуктуации достигают 50%. При температурах поверхности $T > 100^\circ\text{C}$ использованная регулярная модель стратификации скорости звука перестает адекватно описывать распространение ультразвуковых сигналов. Кроме увеличения случайных флуктуаций увеличивается и усредненная временная задержка между прямым и отраженным сигналами.

Это может объясняться несколькими причинами: изменением времени прохождения прямого сигнала за счет увеличения средней скорости звука на уровне преобразователей в восходящем конвективном потоке горячего возду-

ха; изменением горизонтального сечения конвективного потока и его пространственно-временной структуры по высоте с нагревом подстилающей поверхности [8].

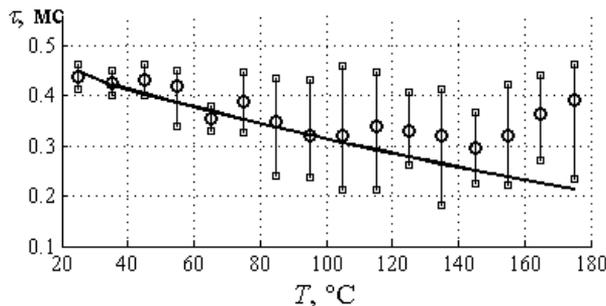


Рис. 5. Зависимость временной задержки между прямым и отраженным сигналами от температуры подстилающей поверхности: сплошная кривая — численное моделирование; кружки — среднее экспериментальное значение с диапазоном случайных отклонений от максимума до минимума

Выводы. Таким образом, использованные аппаратные средства и методика ультразвуковых измерений с корреляционной обработкой фазово-модулированных импульсных ультразвуковых сигналов позволяют получить информацию как о регулярной, так и о случайной стратификации воздуха над нагретой подстилающей поверхностью.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов необходимо, по-видимому, более детальное моделирование процесса теплопереноса над нагретой поверхностью с учетом горизонтальных размеров источника тепла.

Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической неустойчивости: пер. с англ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 288 с.
3. Костюков А.С., Никандров М.В., Славутский Л.А. Изменчивость случайной погрешности ультразвуковых импульсных и доплеровских измерений в неоднородной среде // Нелинейный мир. 2009. Т. 7, № 9. С. 700–705.
4. Костюков А.С., Славутский Л.А. Статистическая погрешность ультразвукового цифрового уровнемера с частотно-фазовой модуляцией сигнала // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2009. № 8. С. 35–37.
5. Красильников В.А. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
6. Левин П.А., Бычкова И.Ю., Славутский Л.А. Изменчивость импульсных ультразвуковых сигналов над нагретой поверхностью // Вестник Чувашского университета. 2013. № 3. С. 310–313.
7. Михатулин Д.С., Чирков А.Ю. Конспект лекций по теплообмену. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 113 с.
8. Протасов М.В., Иванов Т.Ф., Горбачев М.А. Экспериментальное исследование воздушных вихревых структур, образующихся над нагретой подстилающей металлической поверхностью // Оптические методы исследования потоков: сб. докл. XI Междунар. науч.-техн. конф. М.: Объединенный институт высоких температур РАН, 2011.
9. Славутский Л.А. Ультразвуковая томография: приближенные решения технических задач // Труды Академии электротехнических наук Чувашской Республики. 2001. № 1. С. 8–18.

10. Шенелев И.А. Аэродинамика воздушных потоков в помещении. М.: Стройиздат, 1978. 144 с.
11. Эльтерман В.М. Вентиляция химических производств. М.: Химия, 1980. 288 с.
12. Ядарова О.Н., Славутский Л.А. Контроль воздушного потока на основе доплеровского рассеяния ультразвука // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2013. № 3. С. 55–59.

БЫЧКОВА ИРИНА ЮРЬЕВНА – аспирантка кафедры автоматике и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (iboomest@gmail.com).

БЫЧКОВ АНАТОЛИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ – аспирант кафедры электрических и электронных аппаратов, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары.

СЛАВУТСКИЙ ЛЕОНИД АНАТОЛЬЕВИЧ – доктор физико-математических наук, профессор кафедры автоматике и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (las_co@mail.ru).

I. BYCHKOVA, A. BYCHKOV, L. SLAVUTSKII PULSE ULTRASONIC CONTROL OF THE AIR STRATIFICATION OVER THE HEATED SURFACE

Key words: *ultrasound, pulse measurement, phase-modulated signals, heat transfer processes, convection.*

Methods of pulsed ultrasonic measurements and the hardware are offered to control the air stratification and convective flows over heat sources. The results of experiments and functional diagram are described. The results are obtained by analysis of the delay between the direct and reflected from the heated surface ultrasonic signals. In this application the phase modulation and followed by correlation are used. The difference in the spread of the direct and reflected signals provides information of the air stratification in the transition (acceleration) layer of the heated convective flow.

References

1. Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P. *Teoriya voln* [The waves theory]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 384 p.
2. Drazin P. Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge, Cambridge University Press, 2002, xvii, 238 p. (Russ. ed.: *Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoi neustoichivosti*. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005, 288 p.
3. Kostyukov A.S., Nikandrov M.V., Slavutskii L.A. *Izmenchivost' sluchainoi pogreshnosti ul'trazvukovykh impul'snykh i doplerovskikh izmerenii v neodnorodnoi srede* [The variability of the random error of ultrasonic pulse and doppler measurements in a heterogeneous environment]. *Nelineinyi mir* [Nonlinear World], 2009, vol. 7, no. 9, pp. 700–705.
4. Kostyukov A.S., Slavutskii L.A. *Statisticheskaya pogreshnost' ul'trazvukovogo tsifrovogo urovnemera s chastotno-fazovoi moduliyatsiei signala* [Statistically error of the digital ultrasonic transmitter with a frequency-phase modulated signal]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics], 2009, no. 8, pp. 35–37.
5. Krasil'nikov V.A. *Vvedenie v fizicheskuyu akustiku* [Introduction to physical acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 400 p.
6. Levin P.A., Bychkova I.Yu., Slavutskii L.A. *Izmenchivost' impul'snykh ul'trazvukovykh signalov nad nagretoi poverkhnost'yu* [Variability of ultrasonic pulse signals over the heating surface]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2013, no. 3, pp. 310–313.
7. Mikhatulin D.S., Chirkov A.Yu. *Konspekt lektzii po teploobmenu* [Lectures on heat transfer]. Moscow, 2012, 113 p.
8. Protasov M.V., Ivanov T.F., Gorbachev M.A. *Ekspperimental'noe issledovanie vozdushnykh vikhrevykh struktur, obrazuyushchikhsya nad nagretoi podstilyushchei metallicheskoj poverkhnost'yu* [Experimental study of air vortex structures generated on the underlying heated metal

surface]. *Opticheskie metody issledovaniya potokov: sb. dokl. XI Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* [Proc. of XI Int. Sci. Tech. Conf «Optical methods of flow investigation»]. Moscow, 2011.

9. Slavutskii L.A. *Ul'trazvukovaya tomografiya: priblizhennye resheniya tekhnicheskikh zadach* [Ultrasound tomography: approximate solutions to technical problems]. *Trudy Akademii elektrotekhnicheskikh nauk Chuvashskoi Respubliki* [Proc. of the Academy of Electrotechnical Sciences of the Chuvash Republic], 2001, no. 1, pp. 8–18.

10. Shepelev I.A. *Aerodinamika vozdushnykh potokov v pomeshchenii* [Aerodynamics of air streams in the room]. Moscow, Stroiizdat Publ, 1978, 144 p.

11. El'terman V.M. *Ventilyatsiya khimicheskikh proizvodstv* [Aeration of a chemical manufactures]. Moscow, Khimiya Publ., 1980, 288 p.

12. Yadarova O.N., Slavutskii L.A. *Kontrol' vozdushnogo potoka na osnove doplerovskogo rasseyaniya ul'trazvuka* [Control of the air flow on the basis of doppler ultrasound dispersion]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics], 2013, no. 3, pp. 55–59.

BYCHKOVA IRINA – Post-Graduate Student, Department of Automatics and Control in Technical Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

BYCHKOV ANATOLY – Post-Graduate Student of Electrical and Electronic Apparatuses Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

SLAVUTSKII LEONID – Doctor of Physics and Mathematical Sciences, Professor, Department of Automatics and Control in Technical Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

Ссылка на статью: Бычкова И.Ю., Бычков А.В., Славутский Л.А. Импульсный ультразвуковой контроль стратификации воздуха над нагретой поверхностью // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 39–46.

УДК 621.316.717-573.2-048.24

ББК 3 264.344-013

Е.Г. ЕГОРОВ, С.П. ИВАНОВА, Н.Ю. ЛУИЯ

ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩИЙ МЕТОД КОММУТАЦИОННЫХ ИСПЫТАНИЙ МАГНИТНЫХ ПУСКАТЕЛЕЙ

Ключевые слова: магнитный пускатель, коммутационная износостойкость, электрическая дуга, восстанавливающееся электрическое напряжение, восстанавливающаяся электрическая прочность, волновые характеристики отключаемой цепи.

Рассмотрена электрическая схема для коммутационных испытаний магнитных пускателей, приведена осциллограмма переходных процессов при гашении дуги в трехфазной цепи переменного тока. Показана возможность расчета восстанавливающейся прочности на основе тепловых и электродинамических процессов на катоде и восстанавливающегося напряжения на размыкающихся контактах с учетом волновых характеристик отключаемой цепи. Предложен метод оценки коммутационных характеристик магнитных пускателей, который позволяет уменьшить объем прямых испытаний. В основу заложены результаты экспериментов и сравнение значений восстанавливающейся электрической прочности и восстанавливающегося электрического напряжения, которое позволяет оценить вероятностные характеристики успешности гашения и коммутационную способность магнитного пускателя.

Исследования процессов в электрических аппаратах проводились на основе математических моделей электрической дуги отключения электродвигателя [3, 8, 14] для разных условий их применения и эксплуатации [3, 9, 10, 11].

Наиболее энергозатратным видом испытаний являются испытания на коммутационную износостойкость и коммутационную способность (в связи с большей длительностью и потребляемой электроэнергией при их проведении), по результатам которых оценивается надежность магнитных пускателей.

Испытательная схема трехфазного магнитного пускателя изображена на рис. 1.

В качестве примера на рис. 2 приведена осциллограмма переходных процессов при коммутации нагрузки в режиме редких коммутаций.

В соответствии с признанной классической теорией коммутации успешное гашение дуги переменного тока при отключении асинхронного электродвигателя обеспечивается при соблюдении следующего условия: переходное восстанавливающееся электрическое напряжение $U_{ВН}(t)$ должно быть меньше переходного восстанавливающейся прочности $U_{ВП}(t)$ на всем отрезке времени после перехода тока нагрузки через нуль [3, 5].

Характер восстановления электрической прочности определяется тепловыми и электродинамическими процессами на катоде. Для анализа процессов в условиях, характерных для оснований дуги на контакте, за основу можно взять уравнения нестационарной теплопроводности [2]

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + v_0 \exp\left[-\frac{T_M}{T(0,t)}\right] \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \frac{1}{aC_V} (F_i - F_e - F_u), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(\infty,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T(x,\infty)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$T(x,0) = T_0 \exp\left[-\frac{x^2}{4at_0}\right], \quad (4)$$

где v_0 – скорость звука в металле; t_d – время действия источника тепла до момента нуля тока; T_0 – начальное значение температуры в условиях циклических коммутаций.

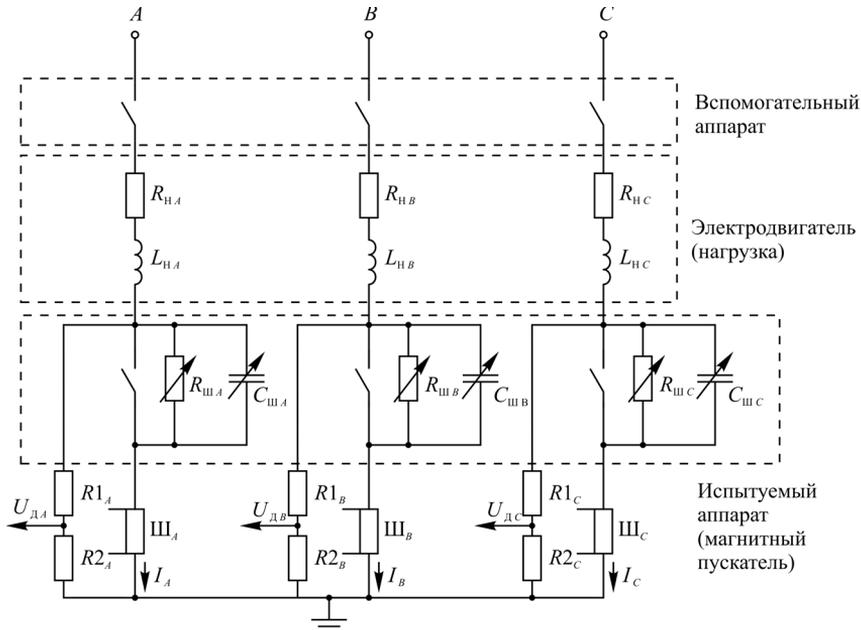


Рис. 1. Схема коммутационных испытаний трехфазного магнитного пускателя: Ш_А, Ш_В, Ш_С – шунты измерения тока нагрузки; R_{нА}, L_{нА}, R_{нВ}, L_{нВ}, R_{нС}, L_{нС} – активно-индуктивная нагрузка в фазах А, В, С; R_{шА}, C_{шА}, R_{шВ}, C_{шВ}, R_{шС}, C_{шС} – активно-емкостная цепочки для регулировки волновых параметров нагрузки; R_{1А} / R_{2А}, R_{1В} / R_{2В}, R_{1С} / R_{2С} – делители напряжения

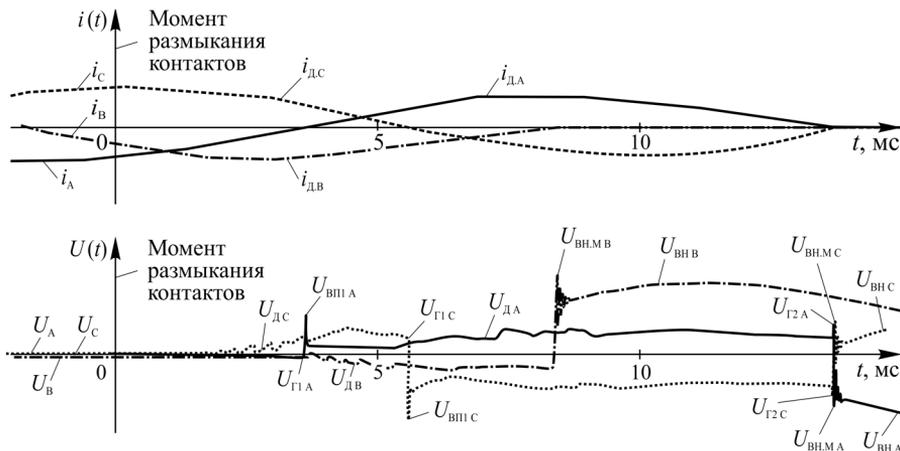


Рис. 2. Осциллограмма переходных процессов при гашении дуги переменного тока трехфазным магнитным пускателем

Решение системы уравнений (1)–(4) позволяет определить температурное поле к моменту нуля тока и вычислить термоавтоэлектронную эмиссию с учетом совместного действия E и T по уравнению Ричардсона – Дешмана с поправкой Шоттки, которое определяет пробивное напряжение межконтактного промежутка (восстанавливающуюся прочность – ВП).

Расчет значения восстанавливающейся электрической прочности производится по соотношению [3]:

$$U_{ВП} = \frac{B_0 U_{iэфф}(\rho l)}{\ln \left(\frac{A_0 U_{iэфф}(\rho l)}{\ln \left[1 + \frac{1}{\gamma(N_э + 1)} \right]} \right)}, \quad (5)$$

где A_0 и B_0 – постоянные коэффициенты, которые могут определяться по кривой Пашена для разных (ρl) ; $U_{iэфф}$ – эффективный потенциал ионизации; ρl – произведение плотности газа на длину околокатодного слоя.

Восстанавливающееся напряжение (ВН) определяется схемой цепи отключения, углом сдвига между током и напряжением, а также волновыми характеристиками отключаемой цепи.

Максимальное значение ВН для режима отключения тока нагрузки определяется по формуле [5]:

$$U_{ВНmax} = k_{сх} k_a \sqrt{2} \frac{U_{л}}{\sqrt{3}} \sin \varphi, \quad (6)$$

где $k_{сх}$ – коэффициент схемы для первой разрываемой фазы в трёхфазной цепи; $U_{л}$ – линейное действующее значение напряжения источника питания; φ – угол сдвига между током и напряжением в разрываемой фазе к моменту перехода тока через нуль.

Каждой конкретной нагрузке отключения соответствуют вполне определенные статистические волновые параметры: собственная частота отключаемого контура – f_0 и коэффициент амплитуды $k_a = \frac{U_{ВНmax}}{U_0}$. В испытательных контурах волновые параметры должны удовлетворять требованию эквивалентности реальным условиям отключения токов нагрузки аппаратами управления.

При испытаниях на коммутационную электрическую износостойкость следует ориентироваться на средние значения частоты колебаний цепи для нагрузки f_0 и коэффициента амплитуды k_a , которые выражаются зависимостями¹ [3]:

$$\begin{cases} f_0 = 2000 I_0^{0,2} U_0^{-0,8} \pm 10\%; \\ k_a = 1,1 + 0,4 \exp(-0,016 f_0) \pm 0,05, \end{cases} \quad (7)$$

где I_0 – ток отключения, А; U_0 – номинальное рабочее напряжение, В; f_0 – частота колебаний цепи нагрузки, кГц.

¹ ГОСТ Р 50030.1-2007 (МЭК 60947-1:2004). Аппаратура распределения и управления низковольтная. М.: Стандартинформ, 2008. 142 с.

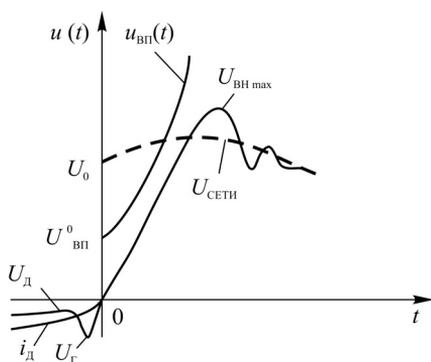


Рис. 3. Переходные процессы
вблизи нуля тока нагрузки

Если проводятся испытания на предельную отключающую способность, то значения волновых параметров определяются по формулам [3]:

$$\begin{cases} f_0 = 2600I^{0,2}U^{-0,8} \pm 10\%; \\ k_a = 1,15 + 0,5 \exp(-0,016f_0) \pm 0,05. \end{cases} \quad (8)$$

В этой работе рассматривается следующий энергосберегающий метод проведения коммутационных испытаний магнитных пускателей.

Для заданных параметров и режимов коммутации (напряжения сети, тока нагрузки, $\cos \varphi$, частоты коммутации, продолжительности включения ВП) определяются статистические характеристики

переходных процессов: восстанавливающейся электрической прочности и восстанавливающегося электрического напряжения (рис. 3).

Анализ этих статистических экспериментальных характеристик позволяет оценить вероятность повторных пробоев и зажигания электрической дуги в следующий полупериод после нулевого значения тока нагрузки, а также время горения дуги, которое определяет эрозию контактов. Статистическую обработку экспериментальных данных проводят, например, по методам, рассмотренным в [1]:

$$U_{CP} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i, \quad (9)$$

где n – число экспериментальных данных; U_i – измеренные значения напряжений (ВП или ВН).

Среднее квадратичное отклонение определяется по следующему соотношению:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i - U_{CP})^2}. \quad (10)$$

Вероятность повторного зажигания в момент нуля тока определяется нижним значением ВП и максимальным значением ВН.

Нижнее значение ВП рассчитывается с учетом среднего квадратичного отклонения и принятой вероятности k

$$U_{ВПmin} = U_{ВПCP} - kS, \quad (11)$$

где k – квантиль нормальной функции распределения. Например, для выбранной вероятности 90% определяется табличное значение [1], которое $k = 1,282$.

Максимальное значение ВН

$$U_{ВНmax} = U_{ВНCP} + kS, \quad (12)$$

Рассчитанное по формуле (11) нижнее значение ВП означает, что 90% всех экспериментальных значений ВП будут располагаться выше $U_{ВПmin}$.

Рассчитанное по формуле (12) верхнее значение ВН означает, что 90% всех экспериментальных значений ВН будут располагаться ниже $U_{ВНmax}$.

Успешность гашения электрической дуги подтверждается сравнением характеристик $U_{\text{ВП}}(t)$ и $U_{\text{ВН}}(t)$.

Следует отметить, что установлено взаимное влияние параметров электрической дуги на процесс гашения. Это влияние заключается в следующем. С одной стороны, электрическая дуга уменьшает восстанавливающуюся прочность в связи с тем, что в нулевой паузе тока плазма остаточного столба дуги обеспечивает достаточное количество заряженных частиц. В отключаемой цепи активное сопротивление электрической дуги снижает величину коммутируемого тока и уменьшает угол сдвига между током и напряжением, что, в свою очередь, уменьшает возвращающее напряжение.

С другой стороны, остаточное сопротивление дуги демпфирует процесс восстановления напряжения, ограничивает ее амплитуду и замедляет скорость восстановления за счет уменьшения частоты собственных колебаний в колебательном контуре, что улучшает дугогашение.

Известны методы испытаний на коммутационную износостойкость, которые обеспечивают снижение энергозатрат при коммутационных испытаниях: ускоренные, синтетические, расчетно-экспериментальные, сокращенные, на основе планирования эксперимента, а также путем применения математических методов расчетов дугогашения на основе решения фундаментальных уравнений тепло- и электрофизических процессов и др. [3, 4, 7].

В данной работе определяются статистические экспериментальные характеристики переходных процессов: восстанавливающейся электрической прочности $u_{\text{ВП}}(t)$ и восстанавливающегося электрического напряжения $u_{\text{ВН}}(t)$ для конкретных параметров нагрузки: мощности электродвигателя и категории применения, напряжения сети, $\cos \varphi$, частоты коммутаций, продолжительности включения и др. Например, $U_{\text{ВНmax}}$ определяется по расчетному соотношению (6) с учетом волновых характеристик коммутируемой цепи (2) или (3) или путем осциллографирования.

Восстанавливающая прочность $U_{\text{ВП}}$ измеряется, например, по методу повторных пробоев [3, 5, 6].

На рис. 4 изображены характеристики переходных процессов $u_{\text{ВП}}(t)$ и $u_{\text{ВН}}(t)$ при гашении дуги переменного тока.

Если переходный процесс $u_{\text{ВП}}(t)$ определяется характеристикой 3, а восстанавливающееся напряжение $u_{\text{ВН}}(t)$ – характеристикой 1, то после нуля тока пробоя промежутка не происходит и электрическая дуга гаснет.

Однако если восстанавливающееся напряжение изменяется по кривой 2, то в момент времени t_1 происходит пробой межконтактного промежутка, так как $u_{\text{ВН исп}}(t) = u_{\text{ВП 1}}(t)$, а электрическая дуга загорается вновь и горит в течение следующего полупериода тока нагрузки.

При измерении восстанавливающейся прочности по методу повторных пробоев необходимо обеспечить гарантированное наличие пробоев (т.е. необходимо увеличивать испытательное напряжение); а также обеспечить равенство

$\frac{dU_{\text{В}}}{dt}$ в номинальном режиме и в режиме увеличенного испытательного напряжения.

Равенство скоростей подъема номинального напряжения U_H и напряжения испытательного $U_{ИСП}$ обеспечивается шунтирующими активным $R_{Ш}$ и емкостным $C_{Ш}$ сопротивлениями. Это связано с тем, что влияние скорости подъема $\frac{dU_B}{dt}$ на измерение значения восстанавливающейся прочности ВП установлено также и для условий коммутации цепей низкого напряжения переменного тока [3].

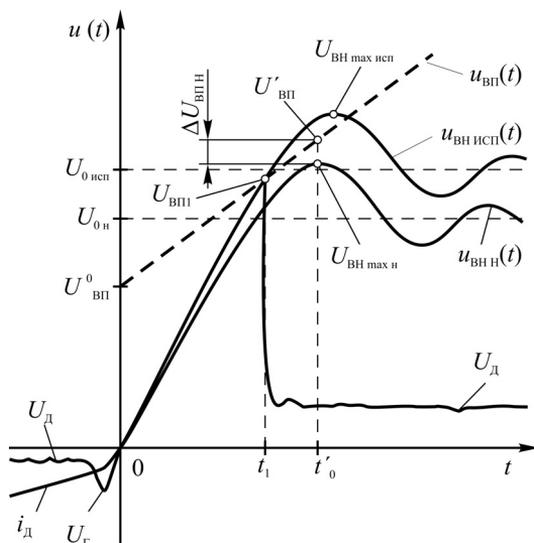


Рис. 4. Переходные процессы тока при гашении электрической дуги переменного тока

Равенство скоростей восстановления напряжения при номинальном (660 В) и испытательном повышенном напряжении (принимается равным 800 В) обеспечивается за счет повышения частоты $f_{0 ИСП}$ по следующей методике.

Скорость восстановления напряжения определяется соотношением [5]:

$$\frac{dU_{ВН}}{dt} = 4U_0 f_0 10^{-6} \frac{\text{В}}{\text{мкс}};$$

где $U_0 = U_m \sin \varphi = \sqrt{2} U_H \sin \varphi$ (для стандартной нагрузки активно-индуктивной цепи $\cos \varphi = 0,35$; $\varphi = 69^\circ$).

Скорость изменения ВН при напряжении $U_H = 660$ В будет равна

$$\left(\frac{dU_{ВН}}{dt} \right) = 4U_0 f_{0Н} 10^{-6} = 177 \frac{\text{В}}{\text{мкс}},$$

так как $f_{0Н} = 53$ кГц.

Равенство изменения восстанавливающегося напряжения при испытательном напряжении $U_{ИСП} = 800$ В будет достигнуто при

$$f_{0 ИСП} = \frac{\left(\frac{dU_{ВН}}{dt} \right)_Н}{4U_{0 ИСП} \cdot 10^{-6}} = 55 \text{ кГц}.$$

В качестве примера в таблице приведены результаты экспериментальных исследований опытного образца трёхполосного магнитного пускателя на номинальный ток 63 А и номинальное напряжение 660 В, 50 Гц; при коммутации тока 300 А и $\cos\varphi = 0,35$.

Результаты измерения характеристик восстанавливающейся прочности, восстанавливающегося напряжения и времени горения электрической дуги

Опыт	Фаза	Первый полупериод				Второй полупериод					
		$t_{дл}$, мс	t_1 , мкс	$U_{вип}$, В	$U_{внн}$, В	$I_{откл\ max}$, А	$t_{дл}$, мс	t_1 , мкс	$U_{вип}$, В	$U_{внн}$, В	$I_{откл\ max}$, А
1	A	1,7	7,9	344		372	10	11	> 610**	610	320
	B	6,9	13	> 1035*	1035	370	—	—		1035	—
	C	4,9	7,9	457		412	7,4	5,2	> 456**	456	296
2	A	2	7,9	342		372	9,7	7,9	> 512**	512	292
	B	6,8	13	> 1100*	1100	370	—	—	—	—	—
	C	4,9	11	855		405	6,9	7,9	> 520**	520	282
3	A	1,4	7,9	375		373	9,8	13	> 470**	470	292
	B	6,8	13	> 1150*	1150	356	—	—	—	—	—
	C	4,7	11	366		405	6,9	15	> 730**	730	260
4	A	1,9	7,9	407		372	9,6	7,9	> 500**	500	276
	B	6,8	20	> 1030*	1030	364	—	—	—	—	—
	C	4,9	11	570		405	9,4	20	> 565**	565	240
5	A	1,8	13	375		370	9,5	13	> 626**	626	280
	B	7,1	15	> 1060*	1060	348	—	—	—	—	—
	C	4,7	7,9	730		405	7	13	> 490**	490	240

Примечание. * – успешное гашение дуги в фазе B в течение первого полупериода; ** – успешное гашение дуги в фазах A и C в течение второго полупериода.

Коммутационная способность испытуемого пускателя определяется первым гасящим полюсом (B) в первом полупериоде, а окончательное гашение происходит во втором полупериоде переменного тока.

По результатам экспериментальных данных оценивается вероятностная характеристика успешности гашения.

Таким образом, рассматриваемая энергосберегающая методика при коммутационных испытаниях магнитного пускателя предполагает экспериментальное измерение характеристик восстанавливающейся электрической прочности и восстанавливающегося электрического напряжения. По результатам таких измерений могут быть приняты решения о возможности сокращения (уменьшения) числа испытательных коммутационных циклов, что позволит снизить энергозатраты на их проведение.

По мере накопления статистических данных по каждому типу исполнения магнитных пускателей может быть рекомендована оптимальная величина контролируемых коммутационных циклов, которая будет достаточна для подтверждения установленной в нормативно-технической документации надежности магнитного пускателя.

Литература

1. Венцель Е.С. Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Академия, 2003. 464 с.
2. Головейко А.Г. Элементарные и теплофизические процессы на катоде при мощном импульсном разряде // Инженерно-физический журнал. 1968. Т. 14, № 3.

3. Егоров Е.Г. Испытания и исследования низковольтных коммутационных аппаратов: в 2 ч. Ч. 2. Исследования низковольтных коммутационных аппаратов [Электронный ресурс] / Чуваши. Чебоксары, 2015. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
4. Егоров Е.Г., Иванова С.П., Рыжкова Н.Ю., Егоров Е.Г. Некоторые направления энергосбережения при испытаниях магнитных пускателей на надежность // Электротехника. 2012. № 5. С. 16–19.
5. Основы теории электрических аппаратов / под ред. П.А. Курбатова. 5-е изд., перераб., и доп. СПб.: Лань, 2015. 592 с.
6. Павлов В.А., Егоров Е.Г., Максимов В.М., Иванова С.П., Луия Н.Ю. Методика измерения восстанавливающейся электрической прочности искровых промежутков в коммутаторах с подвижными электродами // Вестник Чувашского университета. 2014. № 2. С. 52–56.
7. Розанов Ю.К., Егоров Е.Г., Егоров Г.Е. Неразрушающие испытания контактной коммутационной аппаратуры методом контроля восстанавливающейся электрической прочности // Электротехника. 2007. № 4. С. 47–53.
8. Урусов Р.М., Урусова И.П. Нестационарная трехмерная модель электрической дуги. Ч. 1. Математическая модель и результаты исследования // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 1. С. 121–134.
9. Bugaris R.M., Doan D.R. Arc-flash incident energy variations: A study of low-voltage motor control center unit configurations and incident energy exposure. *IEEE Industry Applications Magazine*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 40–45.
10. Iwata M., Tanaka S., Miyagi T., Amakawa T., Pietsch G. Influence of perforated metal plate on pressure rise and energy flow due to internal arcing in a container with a pressure-relief opening. *IEEE Trans. Power. Deliv.*, 2014, vol. 29, no. 3, pp. 1292–1300.
11. Jonsson E., Runde M., Dominguez G., Friberg A., Johansson E. Comparative study of arc-quenching capabilities of different ablation materials. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2013, vol. 28, no. 4, pp. 2065–2070.
12. Tarczynski W., Daszkiewicz T. Switching arc simulation. *Przeglad Elektrotechniczny*, 2012, R. 88 NR 7b, pp. 60–64.

ЕГОРОВ ЕВГЕНИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ – кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой электрических и электронных аппаратов, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (ea@chuvsu.ru).

ИВАНОВА СВЕТЛАНА ПЕТРОВНА – кандидат технических наук, доцент кафедры электрических и электронных аппаратов, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (spi_chuvsu@mail.ru).

ЛУИЯ НАТАЛИЯ ЮРЬЕВНА – аспирантка кафедры электрических и электронных аппаратов, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (nataliluiya@mail.ru).

E. EGOROV, S. IVANOVA, N. LUIYA

METHOD OF SWITCHING POWER TEST MAGNETIC STARTER

Key words: magnetic starter, switching wear resistance, electrical arc, the recovery voltage, restore the dielectric strength, wave characteristics switchable circuit.

Consider an electric circuit for switching test magnetic starters and brought waveform transients quench the arc in a three-phase AC circuit. The possibility of recovering the strength calculation on the basis of thermal and electrodynamic processes at the cathode and recovery voltage on the NC contact, taking into account the characteristics of the wave switchable circuit. This paper proposes a method for estimating the switching characteristics of the magnetic contactors, which can reduce the amount of direct testing. The foundation laid by the results of experiments and comparison of recovering electric strength and restore the voltage that allows to evaluate the probability of success of damping characteristics and the switching capacity of the magnetic starter.

References

1. Venttsel' E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya veroyatnostei i ee inzhenernye prilozheniya* [Probability theory and its engineering applications]. Moscow, Academia Publ., 2003, 464 p.
2. Goloveiko A.G. *Elementarnye i teplofizicheskie protsessy na katode pri moshchnom impul'snom razryade* [Elementary and thermal processes on the cathode when a powerful pulsed discharge]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal* [Journal of Engineering Physics], 1968, vol. 14, no. 3.
3. Egorov E.G. *Ispytaniya i issledovaniya nizkovol'tnykh kommutatsionnykh apparatov: uchebnoe elektronnoe izdanie. Part 2. Issledovaniya nizkovol'tnykh kommutatsionnykh apparatov* [Tests and studies of low-voltage switching devices: educational electronic edition. Part 2: Studies of low-voltage switching devices]. Cheboksary, 2015.
4. Egorov E.G., Ivanova S.P., Ryzhkova N.Yu., Egorov E.G. *Nekotorye napravleniya energosberezheniya pri ispytaniyakh magnitnykh puskatelei na nadezhnost'* [Some areas of energy savings in testing the reliability of magnetic starters]. *Elektrotehnika* [Electrical Engineering], 2012, no. 5, pp. 16–19.
5. Kurbatov P.A., ed. *Osnovy teorii elektricheskikh apparatov. 5-e izd.* [Fundamentals of the theory of electrical apparatus. 5th ed.]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2015, 592 p.
6. Pavlov V.A., Egorov E.G., Maksimov V.M., Ivanova S.P., Luiya N.Yu. *Metodika izmereniya vosstanavlivayushcheisya elektricheskoi prochnosti iskrovykh promezhutkov v kommutatorakh s podvizhnymi elektrodami* [Methods of measuring the dielectric strength recovering spark gaps in the switches with movable electrodes]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2014, no. 2, pp. 52–56.
7. Rozanov Yu.K., Egorov E.G., Egorov G.E. *Nerazrushayushchie ispytaniya kontaktnoi kommutatsionnoi apparatury metodom kontrolya vosstanavlivayushcheisya elektricheskoi prochnosti* [Non-destructive testing of the contact switchgear control method recovering electric strength]. *Elektrotehnika* [Electrical Engineering], 2007, no. 4, pp. 47–53.
8. Urusov R.M., Urusova I.R. *Nestatsionarnaya trekhmernaya model' elektricheskoi dugi. Ch. 1. Matematicheskaya model' i rezul'taty issledovaniya* [Non-stationary three-dimensional model of an electric arc. Part 1. Mathematical model and results of research]. *Teplofizika i aeromekhanika* [Thermophysics and Aeromechanics], 2014, vol. 21, no. 1, pp. 121–134.
9. Bugaris R.M., Doan D.R. Arc-flash incident energy variations: A study of low-voltage motor control center unit configurations and incident energy exposure. *IEEE Industry Applications Magazine*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 40–45.
10. Iwata M., Tanaka S., Miyagi T., Amakawa T., Pietsch G. Influence of perforated metal plate on pressure rise and energy flow due to internal arcing in a container with a pressure-relief opening. *IEEE Trans. Power. Deliv.*, 2014, vol. 29, no. 3, pp. 1292–1300.
11. Jonsson E., Runde M., Dominguez G., Friberg A., Johansson E. Comparative study of arc-quenching capabilities of different ablation materials. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2013, vol. 28, no. 4, pp. 2065–2070.
12. Tarczynski W., Daszkiewicz T. Switching arc simulation. *Przegląd Elektrotechniczny*, 2012, R. 88 NR 7b, pp. 60–64.

EGOROV EVGENIY – Candidate of Technical Sciences, Professor, Head of Electrical and Electronic Apparatus Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

IVANOVA SVETLANA – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor of Electrical and Electronic Apparatus Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

LUIYA NATALIA – Post-Graduate Student of Electrical and Electronic Apparatus Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

Ссылка на статью: Егоров Е.Г., Иванова С.П., Луия Н.Ю. Энергосберегающий метод коммутационных испытаний магнитных пускателей // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 47–55.

УДК 621.315
ББК 31.27-05

А.Л. КУЛИКОВ, В.В. АНАНЬЕВ

ОЦЕНКА СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТА ПОВРЕЖДЕНИЯ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

Ключевые слова: определение места повреждения, волновые методы, скорость распространения волн, метод наименьших квадратов, имитационное моделирование, точность.

Используемый в электрических сетях двухсторонний метод волнового определения места повреждения (ВОМП) линий электропередачи обладает существенными ошибками из-за изменения скорости распространения электромагнитной волны вдоль линии. В работе проводилось исследование точности ВОМП на имитационных моделях линий электропередачи. Рассмотрено применение метода оценки скорости распространения электромагнитной волны на основе ошибок волнового определения места повреждения предыдущих повреждений. Определение скорости выполнено на основе использования метода наименьших квадратов в системе уравнений с числом уравнений, превышающим количество неизвестных. Представлено исследование точности определения места повреждения с использованием предложенного принципа. Предложенный метод позволяет существенно снизить ошибки оценки расстояния до повреждения. Разработанный метод может быть внедрен как в существующие, так и в перспективные устройства волнового определения места повреждения.

Системы передачи и распределения электрической энергии являются жизненно важными, поскольку обеспечивают непрерывную связь между генерирующими источниками и конечными потребителями. В этих условиях крайне актуальны быстрые и точные способы определения места повреждения (ОМП) в электрических сетях, позволяющие минимизировать ущерб промышленным предприятиям, сократить имущественные и другие риски населения, а также вероятность поражения людей электрическим током [5].

Перспективно применение волновых методов ОМП (ВОМП) линий электропередачи (ЛЭП), обладающих высокой точностью, не зависящих от режимов и конфигурации электрической сети. В серийно выпускаемых устройствах распространено применение двухстороннего метода ВОМП ЛЭП (рис. 1), который реализуется согласно выражению

$$x = 0,5[L + v \cdot (t_A - t_B)], \quad (1)$$

где t_A, t_B – время распространения электромагнитной волны от повреждения к концам ЛЭП; v – скорость распространения электромагнитной волны; L – длина ЛЭП.

Однако двухсторонний метод не учитывает неоднородность скорости распространения электромагнитной волны вдоль длины линии и обладает соответствующими скоростными ошибками. Разные значения зарегистрированной скорости по концам ЛЭП обусловлены «размытием» фронта волны из-за разной фазовой скорости ее частотных составляющих:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\operatorname{Im}(\sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)})},$$

где ω – круговая частота составляющей волнового процесса; r, L, C – удельное активное сопротивление, индуктивность и емкость.

Цель статьи – разработка нового метода точной оценки скорости электромагнитных волн по данным аварийной статистики применительно к задаче ВОМП ЛЭП.

В ряде отечественных [1, 6] и зарубежных [7, 8] работ исследовались зависимости скорости распространения электромагнитных волн от удельных активных и реактивных параметров ЛЭП. В частности, в [7] были определены частотные характеристики составляющих преобразования Кларка, по которым формировались оценки скорости распространения и коэффициента затухания частотных составляющих электромагнитной волны (рис. 2).



Рис. 1. Схема подключения ВОМП на примере Qualitrol TWS FL-8

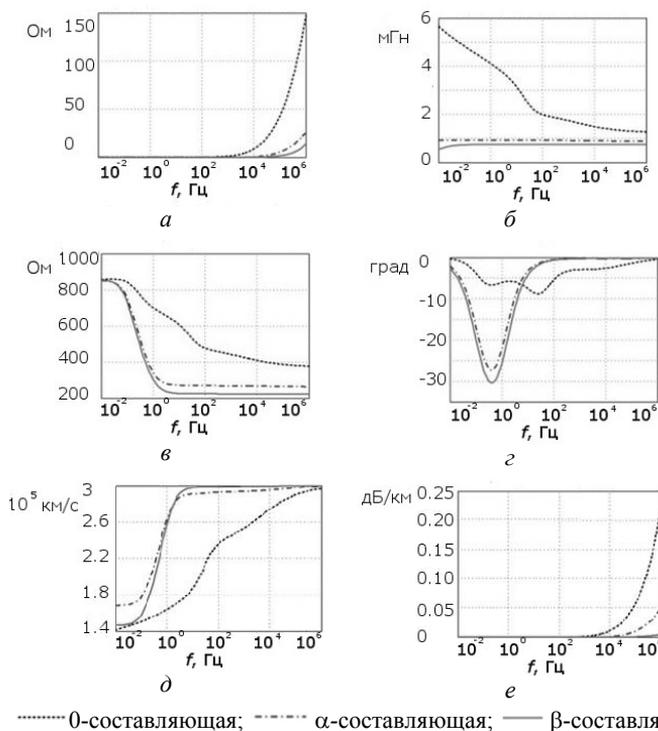


Рис. 2. Зависимость от частоты: а – удельного активного сопротивления; б – удельной индуктивности; в – удельного полного сопротивления; г – аргумента удельного полного сопротивления; д – скорости распространения электромагнитной волны; е – коэффициента затухания

Для повышения точности одностороннего ВОМП ЛЭП авторы [7] предлагают оценку расстояния до повреждения, основанную на определении уточненной скорости первой и отраженной от места повреждения (второй) электромагнитных волн:

$$x = \frac{v_{m1}v_{m2}}{3v_{m1} - v_{m2}},$$

где t_1, t_2 – время регистрации первой и отраженной волн, соответственно; v_{m1} – скорость расчетной модальной составляющей Кларка (которая выбирается на основании вида повреждения по специальной методике [7]) первой электромагнитной волны; эта величина соответствует скорости наибольшей частотной составляющей, которая может быть зарегистрирована устройством ВОМП (определяется параметрами аналого-цифрового преобразователя); v_{m2} – скорость расчетной модальной составляющей Кларка отраженной электромагнитной волны; эта скорость определяется для частоты, задаваемой экспонентой Липшица и вейвлет-преобразованием [7].

Ошибки предлагаемого метода, согласно данным авторов, не превышают 0,46% от длины исследованной линии. Причем ошибки зависят от вида повреждения, мгновенного напряжения и переходного сопротивления.

При решении задачи двухстороннего ВОМП ЛЭП в работе [8] исследовались изменения скорости электромагнитной волны в зависимости от пройденного ею расстояния. При этом авторы [8] рассматривают скорость v распространения волны как функцию расстояния до повреждения (рис. 3, а).

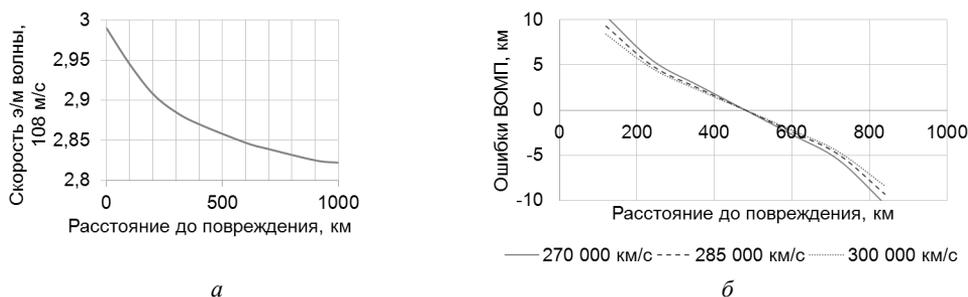


Рис. 2. Зависимости: а – скорости распространения электромагнитной волны от расстояния до повреждения; б – ошибки Δx_A от фиксированной оценочной скорости распространения электромагнитной волны и расстояния до места повреждения

Действительно, для двухстороннего ВОМП (рис. 1) имеем

$$x_A = (v + \Delta v_A)(t_A - t_0);$$

$$x_B = (v + \Delta v_B)(t_B - t_0);$$

$$L = x_A + x_B,$$

где v – фиксированное значение скорости; $\Delta v_A = v_A - v$, $\Delta v_B = v_B - v$ – скоростные ошибки, возникающие из-за разности действительной и фиксированной расчетной скоростей распространения электромагнитной волны; t_A, t_B – время прихода волны к концам A и B ЛЭП; t_0 – время повреждения.

Пусть $\Delta v_A = \alpha \cdot v$, $\Delta v_B = \beta \cdot v$, тогда с учетом ранее введенных выражений имеем

$$x_A = \frac{1 + \alpha}{2 + \alpha + \beta} L + \frac{(1 + \alpha)(1 + \beta)}{2 + \alpha + \beta} v(t_A - t_B). \quad (2)$$

При игнорировании изменений скорости распространения электромагнитной волны, т.е. $\alpha = \beta = 0$, приходим к общеизвестному выражению расчета при ВОМП (1)

$$x_A = \frac{1}{2} L + \frac{1}{2} v(t_A - t_B). \quad (3)$$

Разность выражений (3) и (2) обеспечивает расчетное соотношение абсолютной ошибки

$$\Delta x_A = (\beta - \alpha) \cdot L + \frac{(\alpha + \beta + 2\alpha\beta)}{2 \cdot (2 + \alpha + \beta)} v(t_A - t_B).$$

Как указывалось ранее, величина ошибки Δx_A зависит от принятой фиксированной скорости v и расстояния до места повреждения, а по результатам моделирования [8] достигает существенных значений (рис. 3, б).

Для компенсации ошибок Δx_A был предложен алгоритм [8], учитывающий зависимость скорости распространения волны от расстояния до места повреждения: $v_A \approx v(x_A)$; $v_B \approx v(x_B)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} x_A &= v_A(t_A - t); \\ x_B &= v_B(t_B - t); \\ L &= x_A + x_B, \end{aligned}$$

совместное решение уравнений с исключением переменной t приводит к выражению

$$x_A = \frac{L \cdot v_A + v_A \cdot v_B \cdot (t_A - t_B)}{v_A + v_B},$$

учитывающему, что

$$t = t_A - \frac{x_A}{v(x_A)}; t = t_B - \frac{x_B}{v(x_B)}.$$

По данным моделирования [8], ошибка такого алгоритма составляет около 0,1% от длины ЛЭП.

Следует отметить, что для повышения точности ВОМП ЛЭП целесообразно применение навигационных подходов [3, 4], а также процедур адаптации [2] на основе имитационного моделирования. Однако такие эксперименты предполагают использование адекватных имитационных моделей, которые достаточно сложно реализовать с учетом специфики каждой анализируемой ЛЭП.

С точки зрения эксплуатирующих электросетевых организаций, имеющих статистику повреждений конкретной ЛЭП, целесообразным является использование данных об аварийных отключениях для предварительной оценки скорости распространения электромагнитных волн.

Предлагаемый алгоритм уточнения скорости v (1) для реализации ВОМП ЛЭП поясним примером (рис. 4). Пусть имеется ЛЭП (рис. 4), на которой произошло N повреждений ($i = 1, \dots, N$). Для каждого из повреждений имеют-

ся результаты обходов линии с расчетом расстояния $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ и ошибками ВОМП $\Delta x_1, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$ из-за расчетного и реального расстояний.

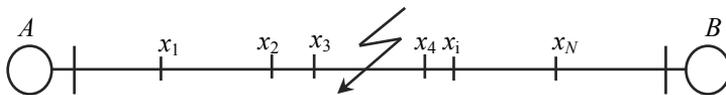


Рис. 3. Анализируемая линия электропередачи

С учетом данных предшествующих повреждений запишем

$$\Delta x_1 + x_1 = 0,5[L + v \cdot (t_{A1} - t_{B1})];$$

$$\Delta x_2 + x_2 = 0,5[L + v \cdot (t_{A2} - t_{B2})];$$

...

$$\Delta x_i + x_i = 0,5[L + v \cdot (t_{Ai} - t_{Bi})];$$

...

$$\Delta x_N + x_N = 0,5[L + v \cdot (t_{AN} - t_{BN})].$$

Перенесем слагаемое $0,5 \cdot L$ в левую часть выражения и введем матричные обозначения

$$X = \begin{bmatrix} \Delta x_1 + x_1 - 0,5L \\ \Delta x_2 + x_2 - 0,5L \\ \dots \\ \Delta x_i + x_i - 0,5L \\ \dots \\ \Delta x_N + x_N - 0,5L \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} t_{A1} - t_{B1} \\ t_{A2} - t_{B2} \\ \dots \\ t_{Ai} - t_{Bi} \\ \dots \\ t_{AN} - t_{BN} \end{bmatrix}.$$

Тогда выражение может быть преобразовано к виду

$$X = T \cdot v.$$

Применяя метод наименьших квадратов, получим уточненное значение скорости

$$v = (T^T \cdot T)^{-1} \cdot T^T \cdot X. \quad (4)$$

После получения уточненного значения скорости реализуется расчет расстояния по выражению (1).

Важно отметить, что для более точного ВОМП ЛЭП необходимо выбрать данные предыдущих повреждений ЛЭП как можно ближе к предполагаемому месту повреждения. В таком случае может быть предложен следующий алгоритм:

1. Реализация расчетов по формуле (1) в предположении, что скорость распространения электромагнитных волн равна скорости света.

2. Выбор из массива предыдущих повреждений совокупности точек (например, трех), наиболее близко расположенных к предполагаемому месту повреждения.

3. Уточнение скорости по выражению (4).

4. Пересчет ВОМП ЛЭП по выражению (1) на основе уточненного значения полученной скорости.

Точность предлагаемого метода проанализирована с использованием программного продукта PSCAD на примере участка электрической сети 220 кВ (рис. 5, табл. 1).

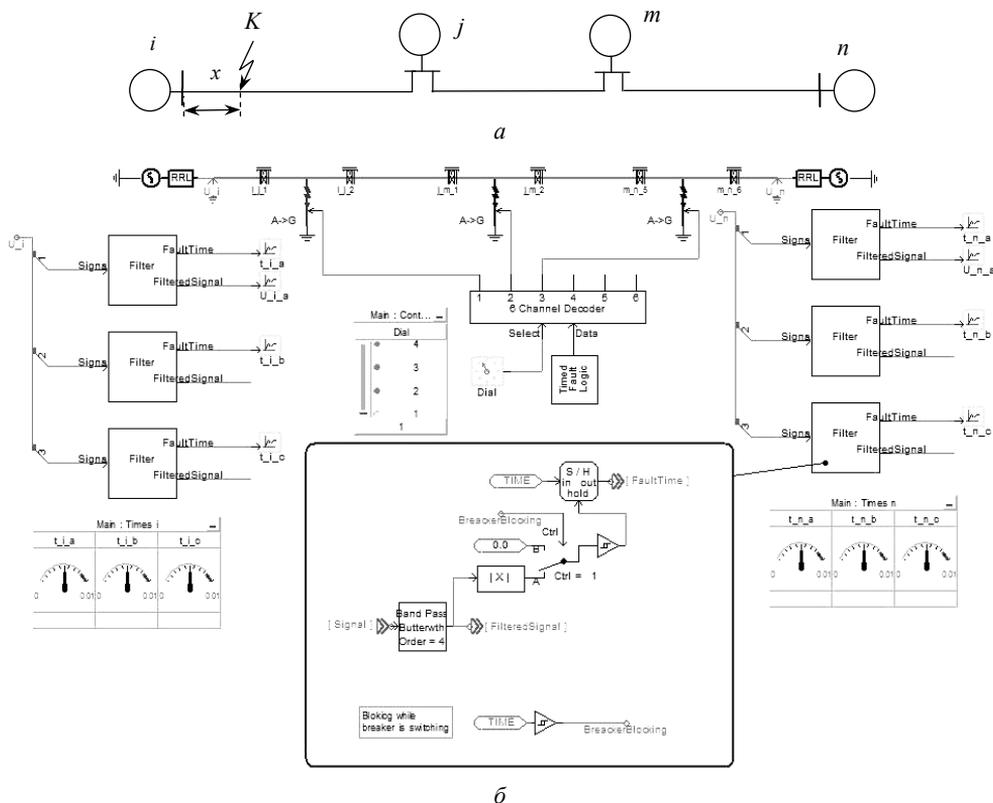


Рис. 4. Структурная схема (а) и модель в PSCAD участка электрической сети (б) 220 кВ

Таблица 1

Параметры участков анализируемой электрической сети 220 кВ

Участок	Длина, км	Марка провода	Марка троса	Тип опоры	Удельное сопротивление грунта, Ом·м
<i>i-j</i>	57	AC-400/51	C-70	П-220-2Т	4000
<i>j-m</i>	46	ACO-300/39	C-70	ПБ-220-1	100
<i>m-n</i>	132	AC-240/32	C-70	П-220-1Т	1000

Узлы регистрации устройства ВОМП расположены в узлах *i* и *m*, данные об ошибках предыдущих повреждений приведены в табл. 2.

Проведено моделирование коротких замыканий в точках, не совпадающих с ранее зафиксированными в процедурах ОМП. Уточненная скорость рассчитывалась по трем ближайшим к короткому замыканию точкам. Результаты имитационных испытаний сведены в табл. 3.

Анализ табл. 3 показывает, что погрешность уточненного ВОМП ЛЭП лежит в пределах погрешности двухстороннего метода, обусловленной дискретными отсчетами времени. Сравнение погрешностей методов представлено на рис. 6.

Таблица 2

Результаты оценки ВОМП при предыдущих повреждениях ЛЭП

Действительное расстояние до повреждения от узла i , км	Ошибка оценки ВОМП, м
10	530
30	445
50	345
60	310
80	210
100	95
110	45
150	-170
190	-415
230	-705

Таблица 3

Сравнение точности двухстороннего ВОМП и ВОМП с уточнением скорости

Расстояние от узла i до точки КЗ, км	t_1 , мс	t_2 , мс	Оценка ВОМП, м	Ошибка ВОМП, м	Уточненная скорость, м/с	Уточненная оценка ВОМП, м	Ошибка уточненного ВОМП, м
1	1,0035	1,7825	650	350	299068021	1013	-13
20	1,0669	1,719	19685	315	299005707	20009	-9
40	1,1337	1,6522	39725	275	298910990	40007	-7
70	1,2338	1,5518	69800	200	298809984	69989	11
90	1,3007	1,485	89855	145	298535402	89990	10
130	1,4345	1,3512	129995	5	298926842	129950	50
170	1,5684	1,2174	170150	-150	299102256	169992	8
210	1,7025	1,0837	210320	-320	298883348	209975	25
234	1,7833	1,0035	234470	-470	298861000	234026	-26

Примечание. Погрешность оценки расстояний при моделировании составляет 60 м.

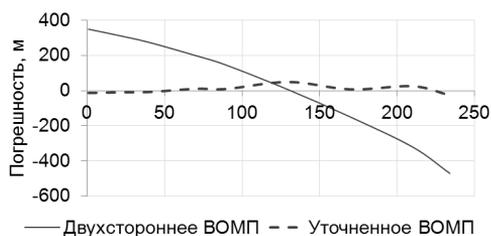


Рис. 5. Сравнение погрешности двухстороннего метода и предлагаемого метода на примере ЛЭП 220 кВ

Исследование показало (рис. 6, табл. 3), что ошибка ВОМП по разработанному методу не зависит от расстояния до места повреждения ЛЭП.

Очевидно, что чем ближе к произошедшему повреждению будут выбраны координаты ранее зафиксированных повреждений ЛЭП, тем точнее будет проведена оценка скорости распространения электромагнитных волн и ВОМП ЛЭП. Следует отметить, что на

величину сокращения ошибок оценок скорости волны будут влиять температурно-влажностные, погодные, а также сезонные и другие условия.

Таким образом, данные аварийной статистики анализируемой ЛЭП могут быть применены для реализации процедуры адаптации двухстороннего

ВОМП к параметрам конкретной линии с уточнением скорости распространения электромагнитных волн.

Выводы. 1. Алгоритмы устройств ВОМП, эксплуатирующихся предприятиями электрических сетей, обладают скоростными ошибками из-за неучета изменений скорости распространения электромагнитных волн вдоль ЛЭП.

2. Целесообразно использование аварийной статистики для уточнения скорости волны и сокращения ошибок ВОМП ЛЭП на основе метода наименьших квадратов.

3. Разработанный метод усовершенствованного ВОМП ЛЭП обладает малыми ошибками, может быть внедрен в существующие, а также разрабатываемые устройства ОМП без модификации аппаратного обеспечения.

Литература

1. Костенко М.В., Перельман Л.С., Шкарин Ю.П. Волновые процессы и электрические помехи в многопроводных линиях высокого напряжения. М.: Энергия, 1973.
2. Куликов А.Л., Ананьев В.В. Адаптивное волновое определение места повреждения линии электропередач // Вестник ИГЭУ. 2014. № 4. С. 21–25.
3. Куликов А.Л., Ананьев В.В. Повышение точности многостороннего волнового определения места повреждения линий электропередачи за счет использования псевдодальномерного метода // Известия высших учебных заведений. Сер. Электромеханика. 2015. № 3. С. 73–76.
4. Куликов А.Л., Ананьев В.В., Лачугин В.Ф., Вуколов В.Ю., Платонов П.С. Моделирование волновых процессов на линиях электропередачи для повышения точности определения места повреждения // Электрические станции. 2015. № 7. С. 45–53.
5. Шальт Г.М. Определение мест повреждения в электрических сетях. М.: Энергоиздат, 1982.
6. Шишкин В.Х., Шкарин Ю.П. Расчет параметров высокочастотных трактов по линиям электропередачи. М.: Изд-во МЭИ, 1999.
7. Fisher N., Skendzic V., Moxley R., Needs I. Protective relay travelling wave fault location. Proc. of 11th Int. Conf. «Developments in Power System Protection» (April 23–26). Birmingham, UK, 2012.
8. Yi-ning Z., Yining Z., Yong-hao L., Min X., Ze-xiang C. A novel algorithm for HVDC line fault location based on variant travelling wave speed. Proc. of 4th Int. Conf. «Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies». Weihai, Shandong, 2011, pp. 1459–1463.

КУЛИКОВ АЛЕКСАНДР ЛЕОНИДОВИЧ – доктор технических наук, профессор кафедры электроэнергетики, электроснабжения и силовой электроники, Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород (inventor61@mail.ru).

АНАНЬЕВ ВИТАЛИЙ ВЕНИАМИНОВИЧ – аспирант кафедры электроэнергетики, электроснабжения и силовой электроники, Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород (an-vitek@ya.ru).

A. KULIKOV, V. ANANIEV

TRAVELLING WAVE PROPAGATION SPEED ESTIMATE IN POWER LINE FAULT LOCATION ISSUE

Key words: power transmission lines, travelling wave fault location, travelling wave speed, least square method, fault location method errors.

Double ended travelling wave fault location method used in the electrical network has significant errors due to changes in the electromagnetic waves propagation velocity. Experiments on simulation of power lines had used. Travelling wave propagation speed estimate method based on previous damage fault location errors is described. The travelling wave speed estimate made on excess information condition by using the least squares method. Develop method results have shown. An improved method allows reducing the errors in distance estimation to the damage. The developed method can be embedded into existing and future travelling wave method based fault location devices.

References

1. Kostenko M.V., Perel'man L.S., Shkarin Yu.P. *Volnovye protsessy i elektricheskie pomekhi v mnogoprovodnykh liniyakh vysokogo napryazheniya* [Travelling Wave Processes and Electrical Noises in Multi-wire High-voltage Power Lines]. Moscow, Energiya Publ., 1973.
2. Kulikov A.L., Anan'ev V.V. *Adaptivnoe volnovoe opredelenie mesta povrezhdeniya linii elektroperedach* [Adaptive Travelling Wave Fault Location for Power Lines]. *Vestnik IGEU* [Ivanovo State University Herald], 2014, no. 4, pp. 21–25.
3. Kulikov A.L., Anan'ev V.V. *Povyshenie tochnosti mnogostoronnego volnovogo opredeleniya mesta povrezhdeniya linii elektroperedachi za schet ispol'zovaniya psevdodal'nomernogo metoda* [An improved accurate travelling wave fault location method based on navigation algorithms]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika* [Proceedings of the higher educational institutions. Electromechanics], 2015, no. 3, pp. 73–76.
4. Kulikov A.L., Anan'ev V.V., Lachugin V.F., Vukolov V.Yu., Platonov P.S. *Modelirovanie volnovykh protsessov na liniyakh elektroperedachi dlya povysheniya tochnosti opredeleniya mesta povrezhdeniya* [Power Line Travelling Wave Processes Modeling for Fault Location Accuracy Improving]. *Elektricheskie stantsii* [Power stations], 2015, no. 7, pp. 45–53.
5. Shalyt G.M. *Opredelenie mest povrezhdeniya v elektricheskikh setyakh* [Power Line fault location]. Moscow, Energoizdat Publ., 1982.
6. Shishkin V.Kh., Shkarin Yu.P. *Raschet parametrov vysokochastotnykh traktov po liniyam elektroperedachi* [High-power Line Path Parameters Calculation]. Moscow, MEI Publ., 1999.
7. Fisher N., Skendzic V., Moxley R., Needs I. Protective relay travelling wave fault location. Proc. of 11th Int. Conf. «Developments in Power System Protection» (April 23–26). Birmingham, VK, 2012.
8. Yi-ning Z., Yining Z., Yong-hao L., Min X., Ze-xiang C. A novel algorithm for HVDC line fault location based on variant travelling wave speed. Proc. of 4th Int. Conf. «Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies». Weihai, Shandong, 2011, pp. 1459–1463.

KULIKOV ALEXANDER – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Electric Power Engineering, Electricity Supply and Power Electronics, Nizhny Novgorod State Technical University, Russia, Nizhny Novgorod.

ANANIEV VITALY – Post-Graduate Student, Department of Electric Power Engineering, Electricity Supply and Power Electronics, Nizhny Novgorod State Technical University, Russia, Nizhny Novgorod.

Ссылка на статью: Куликов А.Л., Ананьев В.В. Оценка скорости распространения электромагнитных волн в задаче определения места повреждения линии электропередачи // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 56–64.

УДК 62-83: 621.314.632
ББК 3291.074:3852.3

Г.П. ОХОТКИН

СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА РЕЛЕЙНОЙ САР ТОКА ПРИ ДИАГОНАЛЬНОЙ КОММУТАЦИИ С ПООЧЕРЕДНЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ КЛЮЧЕЙ МОСТОВОЙ СХЕМЫ ВЕНТИЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Ключевые слова: релейная система автоматического регулирования (САР) тока, законы коммутации транзисторных ключей, вентильный преобразователь (ВП), синтез систем автоматического регулирования.

Разработана методика синтеза логического устройства релейной системы автоматического регулирования тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы вентильного преобразователя, которая состоит из методики синтеза логического устройства релейной САР тока при диагональной коммутации ключей с переключением верхнего транзистора моста и методики синтеза схемы, обеспечивающей смену очередности переключения ключей. Структурная схема смены очередности переключения ключей представлена в виде двух четырехканальных ключей, реализованных на логических элементах, и блока управления ключами, выполненного на основе счетчика по mod2 на T-триггере. В ходе синтеза логического устройства получена схема, содержащая минимальное количество логических элементов и элементов памяти.

Благодаря простоте и надежности система автоматического регулирования (САР) тока, состоящая из релейного регулятора тока (РРТ), логического устройства (ЛУ), силовой схемы полупроводникового преобразователя электроэнергии – вентильного преобразователя (ВП), якорной или статорной цепи электродвигателя и датчика тока (ДТ), находит широкое применение в регулируемых электроприводах (РЭП) переменного и постоянного токов. Обеспечение максимального быстродействия РЭП является важной задачей при управлении высокодинамичными объектами. Динамические свойства САР тока определяют динамические показатели электропривода в целом, поэтому синтез САР тока на предельное быстродействие является актуальной задачей.

САР тока относится к нелинейным дискретным системам (кусочно-сшитым системам), синтез которых является сложной задачей, состоящей из нескольких этапов. На первом этапе разрабатывается математическая модель закона коммутации ключей мостовой схемы вентильного преобразователя. Существует множество различных законов коммутации транзисторных ключей моста (рис. 1, а). В работе [1] проведен анализ законов коммутации ключей мостовой схемы импульсного преобразователя. При диагональной коммутации с поочередным переключением ключей управляющие импульсы подаются в противофазе и поочередно на транзисторы диагонали моста (рис. 1, б). Например, на первом интервале дискретности управляющим является транзистор $VT1$ при постоянно открытом $VT4$, а на втором интервале дискретности наоборот – управляющим является транзистор $VT4$ при открытом $VT1$. Далее процесс поочередного управления транзисторами циклически повторяется. В результате этого суммарные потери мощности как на переключение транзисторов (динамические), так и статические потери мощности равномерно распределяются между транзисторами. При диагональной коммутации с поочередным переключением ключей схема, представленная на рис. 1, а, может работать в режимах непрерывного (рис. 1, б) и прерыв-

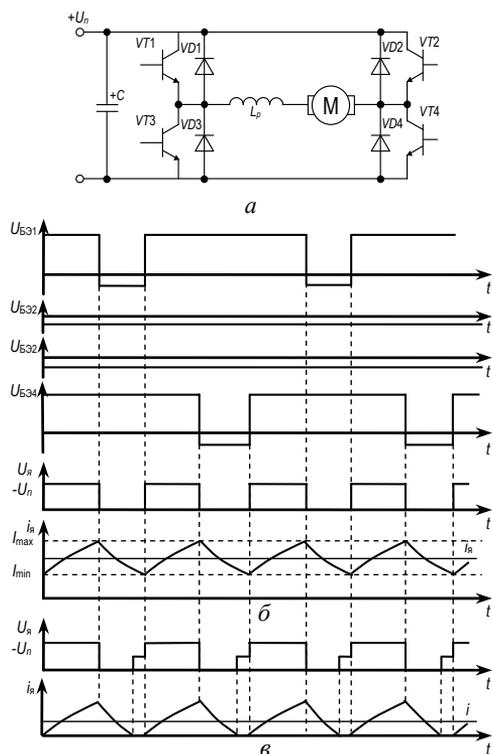


Рис. 1. Мостовая схема ВП и временные диаграммы работы

работана методика синтеза релейного регулятора САР тока при диагональной коммутации с переключением верхних транзисторов мостовой схемы вентильного преобразователя. Структурная схема САР тока, представленная на рис. 2, включает в себя: релейный регулятор тока, состоящий из трех релейных элементов РЭ1-РЭ3, включенных в состав блока релейных элементов (БРЭ); релейный элемент РЭ4, задающий направление вращения двигателя постоянного тока (ДПТ); логическое устройство (ЛУ); ВП, выполненный по мостовой схеме на четырех транзисторах $VT1-VT4$ и обратных диодах $VD1-VD4$; двигатель постоянного тока независимого возбуждения (M) и датчик тока (ДТ).

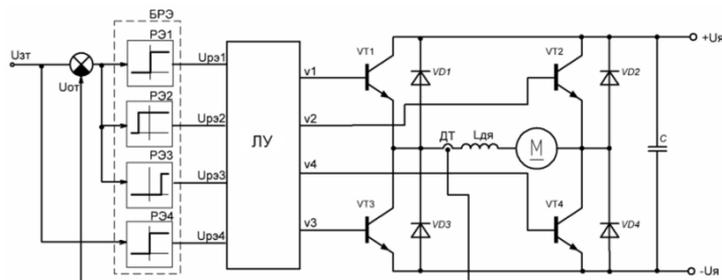


Рис. 2. Структурная схема САР тока

вистого токов (рис. 1, в). Однако релейная САР тока при диагональной коммутации ключей ВП работать в режиме прерывистого тока не может из-за имеющейся зоны нечувствительности релейного регулятора тока. Это ограничивает диапазон регулирования тока якоря ДПТ.

В работе [2] разработана математическая модель диагонального закона коммутации ключей с переключением верхнего транзистора мостовой схемы вентильного преобразователя. Модель представлена в виде таблицы переходов и выходов, а также в виде граф-схемы автомата. Математическая модель при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы вентильного преобразователя аналогична модели при диагональной коммутации с переключением верхнего транзистора моста.

На втором этапе осуществляется структурный синтез релейных регуляторов тока. В работе [3] раз-

Структурная схема релейного регулятора тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы вентильного преобразователя аналогична структурной схеме регулятора при диагональной коммутации с переключением верхнего транзистора моста. Поэтому структурная схема САР тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей моста проектируется на основе схемы, представленной на рис. 2.

На третьем этапе производится структурный синтез логического устройства САР тока. В работе [4] разработана методика синтеза логического устройства САР тока при диагональной коммутации ключей с переключением верхнего транзистора моста. В ходе синтеза структурного автомата получена минимизированная схема логического устройства, представленная на рис. 3.

Схема автомата состоит из двух частей: элементов памяти (*RS*-триггеров) и комбинационной схемы, состоящей из инверторов и логических элементов И с тремя и двумя входами. *RS*-триггеры содержат прямой и инверсный выходы, что позволяет в схеме ЛУ сократить число инверторов.

В литературе вопросы проектирования логического устройства САР тока с диагональным поочередным переключением ключей мостовой схемы ВП не рассмотрены, поэтому синтез ЛУ САР тока является актуальной задачей.

Целью данной работы является синтез ЛУ релейной САР тока с диагональным поочередным переключением ключей мостовой схемы ВП.

Поставленная задача может быть решена введением схемы, обеспечивающей смены очередности переключения ключей вентильного преобразователя, между схемой логического устройства (рис. 2) и ключами ВП. При этом схема ЛУ (рис. 3) синтезированная для диагональной коммутации ключей ВП, остается неизменной и может быть использована для диагональной поочередной коммутации ключей ВП. Такой подход при решении поставленной задачи позволяет полностью воспользоваться методикой синтеза ЛУ при диагональной коммутации ключей ВП [4] и требует разработки методики синтеза схемы смены очередности включения ключей ВП.

Для синтеза схемы, обеспечивающей смены очередности переключения ключей ВП, представим ее структурную схему в виде двух четырехканальных ключей и схемы управления ключами. Четырехканальные ключи обеспечивают поочередную подачу управляющих импульсов, сформированных ЛУ, на транзисторы *VT1* – *VT4* мостовой схемы ВП. При диагональной коммутации с поочередным переключением ключей управляющие импульсы на транзисторы ВП подаются по следующему алгоритму: для направления вращения «Вперед» – на первом интервале дискретности отпирающий импульс управления подается на *VT1* при открытом *VT4*, а на втором интервале дискретности – на *VT4* при открытом *VT1*. Далее процесс поочередной подачи импульсов управления на транзисторы *VT1* и *VT4* циклически повторяется. При вращении ДПТ «Назад» – на первом интервале дискретности отпирающий импульс управления подается на

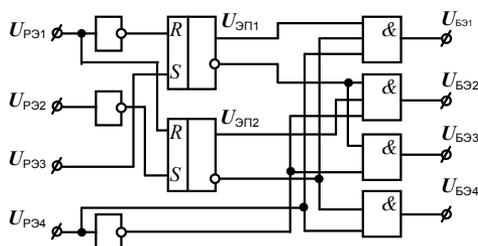


Рис. 3. Схема логического устройства

транзистор VT2 при открытом VT3, а на втором интервале дискретности на VT3 при открытом VT2. Такой алгоритм поочередного переключения ключей математически может быть описан уравнениями:

$$\begin{aligned} V_1 &= U_{\text{бэ1}} U_{\text{ук}} \vee U_{\text{бэ4}} \overline{U_{\text{ук}}}, & V_2 &= U_{\text{бэ2}} U_{\text{ук}} \vee U_{\text{бэ3}} \overline{U_{\text{ук}}}, \\ V_3 &= U_{\text{бэ3}} U_{\text{ук}} \vee U_{\text{бэ2}} \overline{U_{\text{ук}}}, & V_4 &= U_{\text{бэ4}} U_{\text{ук}} \vee U_{\text{бэ1}} \overline{U_{\text{ук}}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $U_{\text{бэ1}}-U_{\text{бэ4}}$ – сигналы, формируемые ЛУ; $U_{\text{ук}}$ – сигнал, формируемый схемой управления ключами.

Схемы управления ключами на первом интервале дискретности формирует сигнал $U_{\text{ук}} = 1$, на втором – $U_{\text{ук}} = 0$, на третьем – $U_{\text{ук}} = 1$ и т.д.

Период следования импульсов управления верхними транзисторами $U_{\text{бэ1}}$ и $U_{\text{бэ2}}$ при диагональной коммутации ключей соответствует интервалу дискретности ВП. Поэтому формирование сигнала $U_{\text{ук}}$ проще всего выполнить с использованием сигналов $U_{\text{бэ1}}$ и $U_{\text{бэ2}}$. Так, для направления вращения ДПТ «Вперед» алгоритм формирования управляющих импульсов $U_{\text{ук}}$ может быть представлен в виде $U_{\text{ук}} = U_{\text{бэ1}}$ для нечетных интервалов дискретности и $U_{\text{ук}} = \overline{U_{\text{бэ1}}}$ для четных интервалов дискретности. Отсюда следует, что частота следования импульсов $U_{\text{ук}}$ в два раза меньше частоты следования импульсов $U_{\text{бэ1}}$. Простейшим устройством, осуществляющим эту операцию, является счетчик по mod 2, выполненный на T -триггере. Исходя из вышесказанного, алгоритм формирования сигнала $U_{\text{ук}}$ математически может быть представлено в виде

$$U_f = U_{\text{бэ1}} \vee U_{\text{бэ2}}, \quad U_{\text{ук}}^+ = U_{\text{ук}} \oplus U_f, \quad (2)$$

где U_f – тактовый сигнал T -триггера; $U_{\text{ук}}$ – выходной сигнал T -триггера до изменения состояния, $U_{\text{ук}}^+$ – выходной сигнал T -триггера после изменения состояния.

Действительно, из (2) следует, что при значении информационного сигнала T -триггера $T = 1$ и $U_f = 1$ следующее состояние T -триггера $U_{\text{ук}}^+ = U_{\text{ук}}$, т.е. состояния триггера 0 и 1 циклически изменяются при каждом изменении тактового сигнала U_f с 1 на 0.

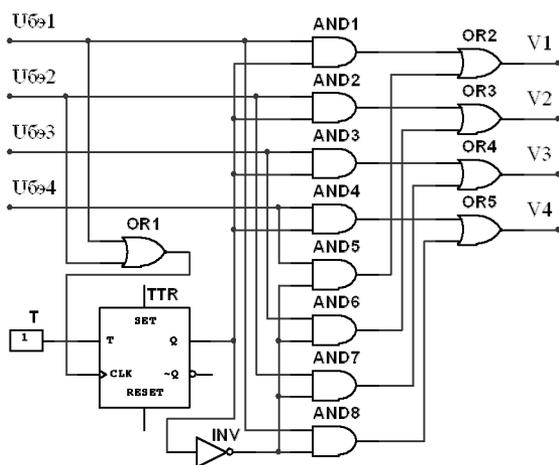


Рис. 4. Схема смены очередности включения ключей

По выражениям (1) и (2) разработана логическая схема смены очередности включения ключей ВП (рис. 4). Схема состоит из двух четырехканальных ключей, выполненных на восьми элементах 2И ($AND1 - AND8$) и четырех элементах 2ИЛИ ($OR2 - OR5$), и блока управления ключами, выполненного на элементе 2И ($OR1$), T -триггере (TTR) и инверторе (INV). На информационный вход T -триггера подается сигнал $T = 1$. При этом схема T -триггера работает в режиме простейшего счетчика по

mod 2. Разработанная схема смены очередности включения ключей ВП содержит минимальное количество логических элементов и один элемент памяти.

Выводы. 1. В работе разработана методика синтеза логического устройства и схемы смены очередности включения ключей ВП САР тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей.

2. В ходе синтеза получена схема, содержащая минимальное количество логических элементов и элементов памяти.

Литература

1. Охоткин Г.П., Романова Е.С. Анализ законов коммутации ключей мостовой схемы импульсного преобразователя // Вестник Чувашиского университета. 2012. № 3. С. 142–149.

2. Охоткин Г.П., Романова Е.С. Разработка математической модели диагонального закона коммутации ключей с переключением верхнего транзистора мостовой схемы преобразователя // Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике: материалы IX Всерос. науч.-техн. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2014. С. 77–86.

3. Охоткин Г.П. Разработка методики синтеза релейных регуляторов САР тока при симметричной и диагональной коммутациях транзисторов ВП // Вестник Чувашиского университета. 2014. № 2. С. 66–74.

4. Охоткин Г.П. Разработка методики синтеза дискретного логического управляющего устройства САР тока // Вестник Чувашиского университета. 2014. № 2. С. 74–83.

ОХОТКИН ГРИГОРИЙ ПЕТРОВИЧ – доктор технических наук, профессор, декан факультета радиоэлектроники и автоматики, заведующий кафедрой автоматики и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (elius@list.ru).

G. OKHOTKIN

THE SYNTHESIS OF LOGICAL DEVICES OF RELAY SYSTEMS OF AUTOMATIC CURRENT REGULATION WHEN DIAGONAL SWITCHING WITH ALTERNATE SWITCHING KEYS THE BRIDGE CIRCUIT RECTIFIER CONVERTER

Key words: relay systems of automatic control current, switching laws of the transistor keys, valve motor drive, synthesis of automatic control systems.

The developed method of synthesis of logical devices of relay systems of automatic current regulation while diagonal switching with alternate switching keys the bridge circuit rectifier Converter, which consists of methods of synthesis of logical devices of relay SAC current when the diagonal switching of the key switches of the upper bridge transistor and methods of synthesis scheme provides a change to the sequence switching keys. Structural diagram of the shift sequence of the shift keys is presented in the form of two four-channel keys, implemented on the logical elements, and the control unit keys made on the basis of the counter by mod2 on the T-trigger. In the course of synthesis of logical devices obtained by the circuit containing the minimum number of logic elements and memory elements.

References

1. Okhotkin G.P., Romanova E.S. *Analiz zakonov kommutatsii klyuchei mostovoi skhemy impul'snogo preobrazovatelya* [Analysis of switching laws for pulse converter bridge keys]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2012, no. 3, pp. 142–149.

2. Okhotkin G.P., Romanova E.S. *Razrabotka matematicheskoi modeli diagonal'nogo zakona kommutatsii klyuchei s pereklyucheniem verkhnego tranzistora mostovoi skhemy preobrazovatelya* [Developing a mathematical model of diagonal switching law for keys with the inverter bridge upper transistors switched]. *Informatsionnye tekhnologii v elektrotekhnike i elektroenergetike: materialy IX*

Vseros. nauch.-tekhn. konf. [Proc. of 9th Rus. Sci. Conf. «Information technology in electric and electric power engineering»]. Cheboksary, Chuvash University Publ., 2014, pp. 77–86.

3. Okhotkin G.P. *Razrabotka metodiki sinteza releinykh regulyatorov SAR toka pri simmetrichnoi i diagonal'noi kommutatsiyakh tranzistorov VP* [Developing techniques for synthesizing relay regulators of automatic current control system with symmetric and diagonal switching of valve inverter transistors]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2014, no. 2, pp. 66–74.

4. Okhotkin G.P. *Razrabotka metodiki sinteza diskretnogo logicheskogo upravlyayushchego ustroystva SAR toka* [Developing synthesis technics for discrete logic control unit of automatic current control system]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2014, no. 2, pp. 74–83.

OKHOTKIN GRIGORY – Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Radioelectronics and Automatics, Head of Department of Automation and Management in Technical Systems, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Ссылка на статью: Охоткин Г.П. Синтез логического устройства релейной САР тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы вентиляционного преобразователя // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 65–70.

УДК 62-83: 621.314.632
ББК 3291.074:3852.3

Г.П. ОХОТКИН

**МОДЕЛИРОВАНИЕ В *MULTISIM*
СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ТОКА
ПРИ ДИАГОНАЛЬНОЙ КОММУТАЦИИ
С ПООЧЕРЕДНЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ КЛЮЧЕЙ
МОСТОВОЙ СХЕМЫ ВЕНТИЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ**

Ключевые слова: моделирование, релейная система автоматического регулирования (*SAR*) тока, вентильный преобразователь (*ВП*).

Разработана модель релейной системы автоматического регулирования тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы вентильного преобразователя в Multisim. Модель SAR тока реализована по синтезированной ранее структурной схеме на виртуальных электронных компонентах, размещенных в библиотеке Multisim. При этом выполнена гальваническая развязка цепей управления и силовой цепи преобразователя. Модель позволяет представить временные диаграммы работы всех элементов SAR тока в реальном масштабе времени. В ходе моделирования работы SAR тока в Multisim установлено, что разработанная модель полностью подтверждает достоверность полученных в ходе структурного синтеза результатов.

При диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы вентильного преобразователя (*ВП*) частота переключения ключа в два раза ниже, чем частота выходного напряжения *ВП*. Кроме того, динамические и статические потери мощности на переключение транзисторов равномерно распределяются между переключающимися транзисторами. Благодаря этому релейная система автоматического регулирования (*SAR*) тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы *ВП* находит широкое применение в регулируемых электроприборах и других системах силовой электроники.

Структурный синтез релейной *SAR* тока, являющейся нелинейной дискретной системой, представляет собой сложную задачу, состоящую из нескольких этапов. В работах [1–4] разработана методика структурного синтеза релейной *SAR* тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы *ВП*.

Для проверки достоверности полученных в ходе структурного синтеза результатов осуществляется моделирование релейных *SAR* тока в *Multisim*. Система моделирования *Multisim* является интерактивным эмулятором схем для их описания и тестирования за минимальное время, имитирующим работу релейной *SAR* тока в реальном масштабе времени. В литературе вопросы моделирования релейных *SAR* тока в *Multisim* освещены недостаточно полно, поэтому данная задача является актуальной.

Целью данной работы являются разработка в *Multisim* модели релейной *SAR* тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы *ВП* и оценка достоверности полученных в ходе синтеза результатов.

Структурная схема релейной *SAR* тока состоит из релейного регулятора тока (*РРТ*), выполненного на трех релейных элементах *РЭ1-РЭ3*, релейного элемента *РЭ4*, задающего направление вращения двигателя постоянного тока (*ДПТ*),

логического устройства (ЛУ), схемы смены очередности включения ключей (СОВК), вентильного преобразователя (ВП), выполненного по мостовой схеме на четырех транзисторах $VT1-VT4$ и обратных диодах $VD1-VD4$, якорной цепи двигателя постоянного тока независимого возбуждения и датчика тока (ДТ) [4].

Для моделирования релейной САР тока в *Multisim* выполним структурный синтез силовой схемы полупроводникового преобразователя, состоящей из схемы вентильного преобразователя, якорной цепи ДПТ и датчика тока. При диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы ВП датчик тока, преобразующий информацию о токе якоря ДПТ в сигнал обратной связи, должен быть включен в якорную цепь двигателя. При этом первичная и вторичная цепи датчика тока должны быть выполнены с гальванической развязкой. Для управления транзисторами моста могут быть использованы драйверы как с гальванической развязкой, так и без гальванической развязки цепей управления и силовой схемы. Для определенности применим схему драйверов, выполненную на оптотранзисторе с индивидуальным источником питания [5].

Модель схемы ВП реализована на виртуальных полупроводниковых приборах, представленных идеальными транзисторами $VT1-VT4$ (рис. 1) и диодами $VD1-VD4$, соединенными в мостовую схему. Гальваническая развязка цепей управления и силовых транзисторов моста выполнена на четырех драйверах, содержащих четыре оптотранзистора $VT11-VT44$ и три источника питания $U1-U3$. Объединение эмиттеров транзисторов $VT3$ и $VT4$ в одну точку позволяет управлять ими от одного источника питания $U3$. Питание мостовой схемы ВП осуществляется от источника постоянного напряжения $U_{вк}$. В диагональ моста, образованного транзисторными ключами, последовательно включены активно-индуктивная нагрузка ($L_{я} - R_{я}$), моделирующая работу якорной цепи ДПТ и датчик тока ДТ ($XCP1$) с гальванической развязкой. Датчик тока выполнен на основе токового пробника, размещенного в библиотеке инструментов *Multisim*. Чувствительность ДТ соответствует 1 mV/mA , для сглаживания высокочастотных помех, снимаемых с датчика тока, используется RC -фильтр, выполненный на $R1$ и $C1$.

Релейный регулятор тока, состоящий из трех релейных элементов РЭ1-РЭ3 (рис. 1), реализован на виртуальных компараторах с идеальными релейными характеристиками. Для формирования нижнего и верхнего порогов переключения транзисторов релейные характеристики элементов РЭ2 и РЭ3 сдвигаются по оси абсцисс влево и вправо от начала координат. Величины смещения характеристик задаются значениями напряжений $U_{см1}$ и $U_{см2}$.

Схема логического устройства САР тока (рис. 1) состоит из инверторов $INV1-INV3$, RS -триггеров $RS1$ и $RS2$ и четырех логических элементов И ($AND1-AND4$). Схема смены очередности включения ключей ВП выполнена на восьми логических элементах И ($AND1-AND8$), пяти элементах ИЛИ ($OR1-OR5$), инверторе $INV4$ и T -триггере (TTR). С помощью интерактивного задатчика цифровых сигналов на информационный вход T -триггера подается логический сигнал $T = 1$. Задающее воздействие $U_{зт}$ формируется генератором $XFG1$. Контроль переменных в схеме САР тока осуществляется осциллографом $XSC1$.

На рис. 2 представлены временные диаграммы работы модели релейной САР тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы ВП. На рис. 2, а приведены импульсы управления транзисторами $VT1$ и $VT4$ моста.

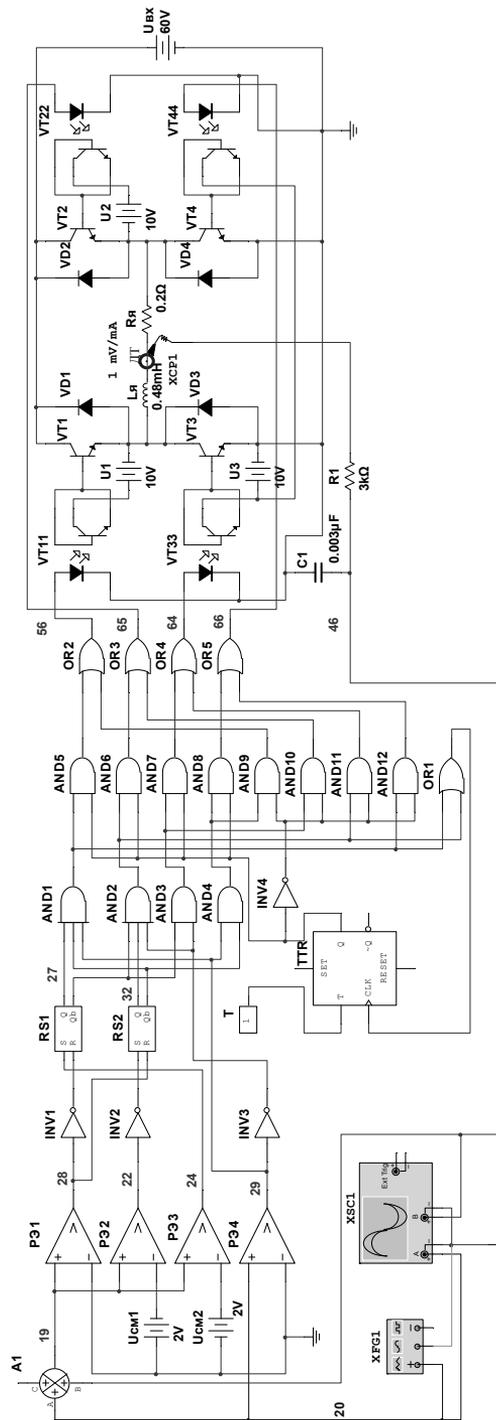


Рис. 1. Модель САР тока

На рис. 2, б представлен процесс отслеживания выходным сигналом $U_{от}$ САР тока при подаче на вход прямоугольного сигнала задания тока $U_{зт} = 6 В$ с частотой $f = 100 Гц$, а на рис. 2, в – при подаче синусоидального сигнала задания тока $U_{зт} = 6 В$ с частотой $f = 100 Гц$.

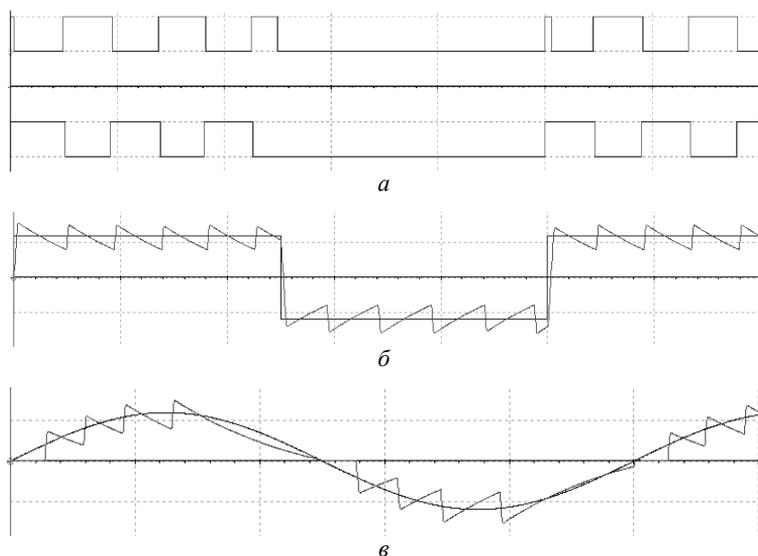


Рис. 2. Временные диаграммы работы САР тока

Временные диаграммы работы САР тока (рис. 2) подтверждают достоверность полученных в ходе структурного синтеза результатов. Разработанная модель релейной САР тока сокращает материальные и временные затраты на проектирование систем силовой электроники.

Литература

1. Охоткин Г.П., Романова Е.С. Разработка математической модели диагонального закона коммутации ключей с переключением верхнего транзистора мостовой схемы преобразователя // Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике: материалы IX Всерос. науч.-техн. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2014. С. 77–86.
2. Охоткин Г.П. Разработка методики синтеза релейных регуляторов САР тока при симметричной и диагональной коммутациях транзисторов ВП // Вестник Чувашского университета. 2014. № 2. С. 66–74.
3. Охоткин Г.П. Разработка методики синтеза дискретного логического управляющего устройства САР тока // Вестник Чувашского университета. 2014. № 2. С. 74–83.
4. Охоткин Г.П. Синтез логического устройства релейной САР тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы // Вестник Чувашского университета. 2016. № 1. С. 65–70.
5. Охоткин Г.П. Моделирование релейных систем автоматического регулирования тока на *Multisim* при симметричной и диагональной коммутациях ключей мостовой схемы вентиляционного преобразователя // Вестник Чувашского университета. 2015. № 3. С. 94–103.
6. Охоткин Г.П. Моделирование структурных схем релейных систем автоматического регулирования тока на *Multisim* // Вестник Чувашского университета. 2015. № 3. С. 86–93.

ОХОТКИН ГРИГОРИЙ ПЕТРОВИЧ – доктор технических наук, профессор, декан факультета радиоэлектроники и автоматики, заведующий кафедрой автоматики и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (elius@list.ru).

G. OKHOTKIN

THE SIMULATION ON MULTISIM SYSTEM OF AUTOMATIC REGULATION OF THE CURRENT IN THE DIAGONAL WITH ALTERNATE SWITCHING OF THE SWITCHING KEYS OF THE BRIDGE CIRCUIT RECTIFIER CONVERTER

Key words: modeling, relay systems of automatic control current, valve motor drive.

The developed model of the relay system of automatic control of current in the diagonal with alternate switching of the switching keys of the bridge circuit rectifier Converter on Multisim. Model SAC current is implemented by synthesized earlier structural diagram of the virtual electronic components placed in the library of Multisim. When this is executed galvanic isolation of control circuit and power circuit of the Converter. The model allows to represent timing diagrams of the operation of all SAC elements current in real time. During the simulation of the SAC current on Multisim it is established that the developed model fully confirms the accuracy obtained in the structural synthesis results.

References

1. Okhotkin G.P., Romanova E.S. *Razrabotka matematicheskoi modeli diagonal'nogo zakona kommutatsii klyuchej s pereklyucheniem verkhnego tranzistora mostovoi skhemy preobrazovatelya* [Developing a mathematical model of diagonal switching law for keys with the inverter bridge upper transistors switched]. *Informatsionnye tekhnologii v elektrotekhnike i elektroenergetike: materialy IX Vseros. nauch.-tekhn. konf.* [Proc. of 9th Rus. Sci. Conf. «Information technology in electric and electric power engineering»]. Cheboksary, Chuvash University Publ., 2014, pp. 77–86.
2. Okhotkin G.P. *Razrabotka metodiki sinteza releinykh regulyatorov SAR toka pri simmetrichnoi i diagonal'noi kommutatsiyakh tranzistorov VP* [Developing techniques for synthesizing relay regulators of automatic current control system with symmetric and diagonal switching of valve inverter transistors]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2014, no. 2, pp. 66–74.
3. Okhotkin G.P. *Razrabotka metodiki sinteza diskretnogo logicheskogo upravlyayushchego ustroystva SAR toka* [Developing synthesis technics for discrete logic control unit of automatic current control system]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2014, no. 2, pp. 74–83.
4. Okhotkin G.P. *Sintez logicheskogo ustroystva releinoi SAR toka pri diagonal'noi kommutatsii s poочередным pereklyucheniem klyuchej mostovoi skhemy* [The synthesis of logical devices of relay systems of automatic current regulation when diagonal switching with alternate switching keys the bridge circuit rectifier converter]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2016, no. 1, pp. 65–70.
5. Okhotkin G.P. *Modelirovanie releinykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya toka na Multisim pri simmetrichnoi i diagonal'noi kommutatsiyakh klyuchej mostovoi skhemy ventil'nogo preobrazovatelya* [Multisim simulation of automatic current control relay systems with symmetric and diagonal switching of valve inverter bridge keys]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2015, no. 3, pp. 94–103.
6. Okhotkin G.P. *Modelirovanie strukturnykh skhem releinykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya toka na Multisim* [Multisim simulation of block diagrams of automatic current control relay systems]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2015, no. 3, pp. 86–93.

OKHOTKIN GRIGORY – Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Radioelectronics and Automatics, Head of Department of Automation and Management in Technical Systems, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

Ссылка на статью: Охоткин Г.П. Моделирование в Multisim системы автоматического регулирования тока при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы вентиляционного преобразователя // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 71–75.

УДК 621.95.044.7-03
ББК К500.134:К500.7

И.В. РЕЗЮКОВ, Л.В. РЕЗЮКОВА

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАЗМЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ОТВЕРСТИЙ МАЛОГО ДИАМЕТРА В ДЕТАЛЯХ ИЗ ХРУПКИХ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Ключевые слова: размерная обработка, калибровка, капиллярные отверстия, электроимпульсная технология, детали из хрупких неметаллических материалов.

Проведен анализ существующих технологий размерной обработки отверстий малого диаметра в деталях из сверхтвердых и хрупких материалов. В результате исследования выявлены недостаточная точность и качество обработки, необходимость применения дорогостоящих сложных инструментов и оборудования, доводки размеров и устранения шероховатости внутренней поверхности отверстий абразивными материалами, при этом предъявляются высокие требования к квалификации рабочих. Все это объясняет низкую продуктивность таких технологий. Кроме того, состояние существующих методов размерной обработки капиллярных отверстий не позволяет в полном объеме механизировать и автоматизировать эти процессы. Предложена и экспериментально проверена технология изготовления отверстий заданного радиуса электроимпульсным методом, которая полностью исключает указанные недостатки. Разработана математическая модель процессов, происходящих при расширении капиллярных отверстий в диэлектрических материалах посредством импульсных дуг, в частности движения температурного фронта, созданного каналом дуги в теле капилляра. Результатом экспериментальных исследований явилось создание автомата, позволяющего калибровать отверстия в заготовках микроинструмента, используемого для термокомпрессионной сварки при автоматической сборке интегральных микросхем.

В конструкциях современных изделий машино-, приборостроения, ядерной энергетики, самолето- и ракетостроения для повышения надежности выпускаемой продукции во все больших масштабах находят применение материалы, обладающие высокими физико-механическими свойствами. Такими материалами является неметаллические трудно обрабатываемые материалы: ситталы, ферриты, кварц, керамика, различные технические камни (например, искусственные сапфиры). Изделия из таких материалов перспективны и необходимы для решения важнейшей задачи обеспечения конкурентоспособности продукции на основе повышения долговечности, надежности и экономичности различных машин, механизмов, приборов и аппаратуры, их технологичности, упрощения конструкций, что является необходимой базой повышения уровня автоматизации технологических процессов. Особенностью вышеперечисленных материалов является их значительная твердость. Высокая абразивная способность твердых материалов осложняет их обработку традиционным лезвийным инструментом (включая и твердосплавный). Несмотря на то, что детали из таких материалов имеют, как правило, весьма несложную (цилиндрическую или коническую) конфигурацию, обработка их обычными способами весьма затруднительна, так как связана с процессом хрупкого разрушения.

Если вопросы формообразования наружных размеров таких деталей решены достаточно успешно с помощью алмазной шлифовки, то получение точных отверстий в этих материалах является очень трудоемкой операцией. В особой степени это касается калибровки отверстий особо малого диаметра – капилляров ($d < 10^{-5} - 10^{-4}$ м).

В приборостроении для производства микроинструмента из неметаллических материалов, используемого для термокомпрессионной сварки при автоматической сборке интегральных микросхем, в настоящее время применяются керамика на основе Al_2O_3 и синтетические корунды. Эти материалы относятся к окисной керамике, которая обладает высокой прочностью при сжимающих и изгибающих усилиях и сохраняет ее до очень высоких температур. Это обстоятельство определило применение такой керамики в качестве конструкционного материала для изготовления деталей, работающих на истирание при одновременном нагреве.

Общими свойствами для всех видов технической керамики, как уже отмечалось, являются их хрупкость и связанные с этим трудности механической обработки, низкое значение предела прочности при ударных нагрузках. При этом, имея практически сравнимые характеристики по отдельным параметрам, керамика несравнима по пористости с синтетическим корундом.

Минимальная пористость рабочих поверхностей является одним из важных свойств, которым должны обладать, в частности, микроинструмент для термокомпрессионной сварки при производстве интегральных микросхем, микросборок полупроводниковых приборов, фильеры для протягивания особо тонких проволок и искусственных волокон и т.п. Содержащиеся в керамике поры приводят к снижению прочности и преждевременному выходу инструмента из строя. Наличие пор на рабочих поверхностях способствует увеличению трения скольжения протягиваемой проволоки по материалу инструмента, их взаимной адгезии и закупорке капиллярного отверстия. Понятно, что отсутствие или уменьшение количества изъянов на внутренней поверхности капиллярных отверстий повысило бы их качественные показатели. Создание высокоэффективных методов обработки керамических материалов представляет одну из сложнейших задач современного машиностроения.

На практике в настоящее время применяются различные технологии выполнения отверстий малого диаметра в труднообрабатываемых неметаллических материалах.

Известны различные *неэлектрические методы* размерной обработки. Основным методом получения высокоточных поверхностей деталей из технической керамики и синтетических корундов является шлифование [7]. Обрабатываемость керамических материалов определяется следующими факторами: механическими свойствами керамики, зависящими от условий и параметров спекания, жесткостью технологической системы и режимами резания.

Одна из существующих технологий (рис. 1) основана на том, что начальное капиллярное отверстие в керамических заготовках 1 при прессовании формируются знаками 2 соответствующих форм и размеров. Затем керамика запекается, освобождается от знака, отверстие вскрывается по линии А – Б, после чего внутренние полости шлифуются и калибруются с помощью вольфрамовых проволок соответствующих диаметров алмазными пастами и суспензиями. Этот метод обработки, во-первых, малопроизводителен, так как: 1) требует нескольких этапов расширения отверстия до требуемого диаметра и в связи с этим – боль-

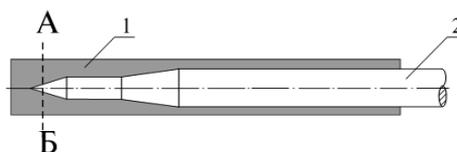


Рис. 1. Формирование заготовки из керамики

ших временных и трудовых затрат на процессы заправки проволок; 2) скорость съема материала ограничена.

Во-вторых, он требует высокой квалификации рабочих и не всегда приводит к желаемому результату – шероховатость внутренней поверхности и округлость отверстий не удовлетворяют предъявляемым требованиям.

Исследования показали наличие в поверхностном слое шлифованных образцов дефектного слоя, обладающего повышенной вязкостью и пониженной хрупкостью [8]. В случае образца, у которого полированием удален внешний дефектный слой, предельная глубина сколообразования t_2 , в случае же шлифованных образцов она складывается из глубины дефектного слоя t_1 , материал которого в большей мере склонен к вязкому пластическому течению, нежели к хрупкому разрушению, и глубины внедрения в исходный материал t_3 , соответствующей t_2 для полированного образца. Из этих соображений была определена глубина дефектного слоя $t_1 = t_3 - t_2$, которая составила в среднем 10 мкм.

Загрязнение абразивными материалами внутренней поверхности обрабатываемой детали требует дополнительных затрат труда, времени и материалов для промывки отверстий, например, этиловым спиртом в ультразвуковой ванне. Кроме того, задача калибровки таким способом усложняется тем обстоятельством, что диаметры калибруемых отверстий должны быть значительно меньше 1 мм.

Алмазное сверление также является одним из наиболее популярных существующих методов механической обработки отверстий в хрупких твердых неметаллических материалах [3]. Существует несколько десятков конструкций алмазных сверл, предназначенных для обработки отверстий в широком интервале диаметров и глубин [12]. Алмазное сверление – напряженный вид шлифования, особенностью которого является полный контакт режущей части инструмента с обрабатываемой деталью в замкнутом объеме. Для осуществления алмазного сверления всегда существует необходимость применения не только специальных инструментов в зависимости от вида отверстий, обрабатываемых материалов, но и создания условий для охлаждения сверл и удаления шлама из зоны обработки.

Кроме того, алмазные сверла требуют правки для получения максимальной режущей способности при установке новых сверл, для восстановления режущих свойств сверла, устранения биения сверла, обеспечения необходимой точности сверла по диаметру.

Диапазон скоростей резания, рекомендуемых при эксплуатации алмазного инструмента, достаточно широк (1–30 м/с). С ростом скорости резания уменьшается удельный съем материала, приходящийся на каждое работающее алмазное зерно и, как следствие, уменьшается шероховатость поверхности. Однако для алмазного сверления, характеризующегося тем, что режущие поверхности алмазных сверл находятся в постоянном контакте с обрабатываемым материалом, рекомендуются нижние значения скоростей этого диапазона. При сверлении керамики, рубина и лейкосапфира рекомендуемая производительность сверления составляет 1–2 мм/мин [3, 9]. При чрезмерном увеличении скорости резания возникают вибрации (как абсолютные, так и относительные), резко падает стойкость сверл, ухудшается качество обработки, увеличиваются сколы и их число.

Более производительным по сравнению с алмазным сверлением способом формообразования поверхностей деталей из твердых и хрупких материалов является ультразвуковая размерная обработка [5]. Ультразвуковая обработка – это воздействие ультразвука (обычно с частотой 15–50 кГц) на вещества в технологических процессах. Для ультразвуковой обработки применяют технологические аппараты с электроакустическими излучателями. Отношение глубины отверстия (толщины материала) к его диаметру является мерой качества получения тонких отверстий. Оно составляет не более 2:1 при обычном сверлении и не более 4:1 – при ультразвуковом методе, используемом при сверлении рубина и других тугоплавких материалов [11]. Это обстоятельство весьма ограничивает область применения этих видов обработки отверстий.

После ультразвуковой прошивки отверстий также требуется доводка для более точной калибровки и достижения необходимой шероховатости поверхности с помощью внутреннего шлифования.

Исходя из проведенного обзора используемых в настоящее время неэлектрических методов калибровки напрашивается вывод о том, что все они обладают существенными недостатками, к которым относятся: высокая трудоемкость; недостаточная чистота обрабатываемой поверхности, что требует применения дополнительных технологических операций; особые требования к качеству рабочего инструмента и высокому уровню квалификации рабочих.

Особого внимания заслуживают *электрофизические методы* обработки отверстий, которым не свойственны перечисленные выше недостатки механических способов.

К электрофизическим методам обработки (ЭФМО) относятся различные по схемному решению и назначению методы, основанные на использовании электрической энергии или специфических физических явлений, создаваемых этой энергией, для удаления материала или формообразования обрабатываемой заготовки [13, 17]. К ЭФМО непроводящих материалов можно отнести электроимпульсную и светолучевую (лазерную) обработки.

Лазерное сверление широко применяется не только для особо твердых материалов, но и для материалов, отличающихся повышенной хрупкостью [16]. В процессе освоения лазерной технологии сверления капиллярных отверстий в рубиновых заготовках [18] решалась также проблема, связанная с растрескиванием заготовок при воздействии на них лазерного излучения. Поэтому выбор режима работы лазера, обеспечивающего целостность заготовок при обработке отверстий в них до каждого конкретного диаметра, имеет решающее значение.

В отдельных случаях при обработке рубина происходило искажение продольной формы отверстия, как правило, в конечной его части. Кроме того, при лазерном сверлении имеет место неперпендикулярность отверстия к торцу заготовки, которая может быть вызвана в некоторых случаях наклонным падением излучения. Поэтому для обработки каждого нового изделия требуется тщательная юстировка оптического резонатора лазера, которая позволяет избежать этого искривления.

Основной же причиной неперпендикулярности отверстий в заготовках из синтетических или природных монокристаллических материалов является неперпендикулярность торцевых поверхностей этих заготовок их оптической оси. Устранение этого недостатка крайне затруднительно и требует высокого уровня квалификации оператора.

Для получения отверстий заданного диаметра применяется также электронно-лучевая обработка [6, 19]. Обработка хрупких материалов (стекла, керамики, рубина, алмаза и др.) имеет свои особенности, связанные с характером разрушения материала в зоне электронно-лучевого воздействия. В процессе электронно-лучевого нагрева возникают механические факторы, обуславливающие растрескивание и вынос вещества в виде осколков. Таким образом, одним из основных недостатков данного метода является нагрев всего образца, а также, как следствие, изменение структуры его вещества, что не всегда благоприятно сказывается на качестве изделия. Кроме того, взаимодействие электронного пучка с продуктами выброса (смесью пара и конденсата) в объеме канала приводит к тому, что непрерывно действующий пучок электронов периодически рассеивается на стенках канала.

Перечисленные недостатки снижают эффективность применения данного метода обработки для изготовления точных отверстий малого диаметра. Требуется высококвалифицированный персонал для доводки каждого отверстия до нужных диаметров и качества поверхности, как правило, механическими способами.

Из приведенного выше обзора и на основании анализа существующих технологий изготовления точных отверстий малого диаметра в труднообрабатываемых, хрупких, неметаллических материалах можно сделать следующие выводы:

1. Механическая обработка (сверление) таких материалов малопродуктивна, требует высокой квалификации рабочих, не всегда удовлетворяет предъявляемым требованиям точности и качества обработки, связана с применением дорогостоящих и сложных инструментов и оборудования, требует доводки размеров и внутренней поверхности отверстий абразивными материалами.

2. Применение многих существующих электрофизических методов обработки таких материалов при современных требованиях к качеству и точности калибруемых отверстий, повышению производительности труда затруднено из-за необходимости включения в технологический процесс операций шлифования и полирования поверхностей.

3. Состояние рассмотренных методов размерной обработки капиллярных отверстий не позволяет полностью механизировать и автоматизировать эти процессы.

Этих недостатков можно избежать, используя в качестве «инструментов» импульсные электрические дуги. Подобная технология описана в [19], но для калибровки микроотверстий в металлических (медь, титан, тантал) деталях.

Метод размерной обработки отверстий малого диаметра в деталях из хрупких неметаллических материалов разработан в Чувашском государственном университете [2] и описан в работах [10, 14].

Для реализации поставленных задач прежде всего была определена принципиальная возможность применения импульсной дуги для расширения отверстий малого диаметра в труднообрабатываемых диэлектрических материалах. Для этой цели была создана экспериментальная лабораторная установка, блок-схема которой изображена на рис. 2.

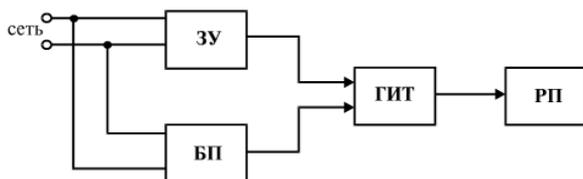


Рис. 2. Блок-схема лабораторной установки

Установка состоит из трех блоков: зарядного устройства ЗУ, генератора импульсов тока ГИТ, блока поджига БП. Разрядный промежуток (РП) представляет собой двухэлектродную систему типа «игла – плоскость». В данной

системе «иглой» служит знак, на который надевается исследуемая заготовка.

Для определения принципиальной возможности применения электроимпульсной технологии для калибровки отверстий малого диаметра в диэлектрических труднообрабатываемых материалах в качестве экспериментальных образцов использовались керамические заготовки микроинструмента КТ-3 [4]. Каждый образец предварительно исследовался под микроскопом МБС-10 или фотографировался на установке ММР-2Р. Производился замер вскрытого отверстия и обследовалось состояние торцевой поверхности заготовки. Затем образец устанавливался в разрядный промежуток, обрабатывался импульсным разрядом, после чего производилось измерение диаметра полученного отверстия. Результаты некоторых из этих измерений сведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты обработки образцов импульсными разрядами

№ образца	Число разрядов	Результаты замеров, мкм	
		начальный размер	конечный диаметр
1	5	22,5	30
	+10	30	37,5
	+5	37,5	47
2	5	22,5	30
	+5	30	35
	+5	35	37
3	5	30	37,5
4	10	20	50
5	10	25	45

На рис. 3 приведены характерные фотографии.

Из данных измерений и сравнения с результатами калибровки отверстий механическим способом, а также по характерным фотографиям был сделан вывод о принципиальной возможности и перспективности применения новой импульсной технологии для расширения отверстий во вскрытых заготовках из труднообрабатываемых материалов, целесообразности продолжения исследований в данном направлении с целью установления количественных закономерностей.

В связи с необходимостью проектирования промышленного образца была разработана математическая модель процессов, происходящих при расширении капиллярных отверстий в диэлектрических материалах посредством импульсных дуг, в частности движения температурного фронта, созданного каналом дуги в теле капилляра [15].

Экспериментальная проверка полученных в [10, 15] соотношений проводилась при калибровке отверстий в заготовках микроинструмента из синтетического корунда «Рубин-10» ГОСТ 22029-76. Исходя из начальных (до воз-

действия) размеров отверстий ($l = 10^{-3}$ м; $r_0 = 12 \cdot 10^{-6}$ м), допустимых значений тока – до 150 А и напряжения – до 25 кВ, индуктивность разрядного контура выбрана равной 1 мкГн, емкость конденсаторов ЕНЭ – $440 \cdot 10^{-12}$ Ф. Ограничения по току определялись максимально допустимым газокINETическим давлением на стенки капиллярного отверстия, а по напряжению – размером разрядного промежутка и ограничением по току.

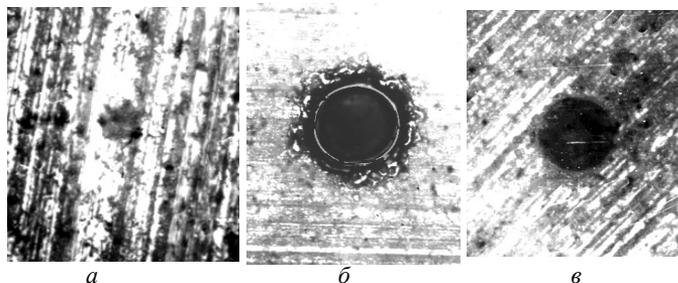


Рис. 3. Характерные фотографии:

- a* – вскрытое капиллярное отверстие ($d = 24 \cdot 10^{-6}$ м);
б – отверстие, откалиброванное электроимпульсным методом ($d = 60 \cdot 10^{-6}$ м);
в – отверстие, откалиброванное традиционным способом ($d = 45 \cdot 10^{-6}$ м)

Результатом экспериментальных исследований явилось создание автомата, позволяющего калибровать отверстия в заготовках микроинструмента. Общий вид автоматической установки показан на рис. 4.

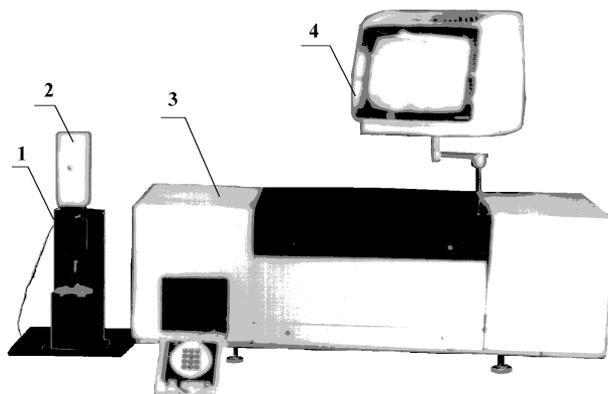


Рис. 4. Автоматическая установка калибровки капиллярных отверстий

Установка состоит из обрабатывающей станции и системы контроля качества отверстий. Обрабатывающая станция 3 включает в себя систему автоматической подачи заготовок и высоковольтное устройство. Система контроля качества отверстий состоит из измерительного и микропроцессорного управляющего устройств.

Измерительное устройство представляет собой видеомикроскоп, состоящий из оптической части 1, телевизионной камеры 2, видеомонитора 4 и электронного блока обработки измерительной информации и представления

результатов измерения в цифровом виде на экране монитора. Устройство определяет величины диаметров отверстия по двум взаимно перпендикулярным направлениям и выводит информацию на экран монитора одновременно с изображением измеряемого отверстия.

Работой установки можно управлять, набирая определенные команды на клавиатуре, которая находится на обрабатывающей станции.

Установка позволяет увеличить производительность при улучшении качества отверстий. Если при обработке по традиционной технологии норма времени на изготовление одного отверстия диаметром 60 мкм равна 27 мин, то при электрофизической калибровке производительность составляет 3 отверстия того же диаметра в 1 мин при стопроцентном контроле изделий. Поверхность отверстия керамической заготовки после теплового воздействия импульсных дуг остекловывается, пористость практически отсутствует.

Литература

1. Абляз Т.Р., Ханов А.М., Хурматуллин О.Г. Современные подходы к технологии электроэрозионной обработки материалов. Пермь: Изд-во:Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2012. 112 с.
2. А.с. 1685046 СССР, МКИ 5 В 28 D 1/00. Способ изготовления отверстий малого диаметра / И.Д. Ахметзянов, И.П. Верещагин, И.В. Резюков. Оpubл. в 1991, 2 с.
3. Бальков А.В. Алмазное сверление отверстий в деталях из хрупких неметаллических материалов. М.: Наука и технологии, 2003. 187 с.
4. Бойко А.Ф., Блинова Т.А. Краткий анализ конструкции и технологии производства инструмента для микросварки и микропайки // Международный научно-исследовательский журнал. 2013. № 12-1(19). С. 45–48.
5. Бржозовский Б.М., Бекренев Н.В. Ультразвуковые технологические процессы и оборудование в машино- и приборостроении. Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2009. 348 с.
6. Бурдовичин В.А., Климов А.С., Окс Е.М. Электронно-лучевая обработка диэлектриков плазменным источником электронов в форвакуумной области давлений // Электронные средства и системы управления. 2009. № 1. С. 185–188.
7. Горелов В.А., Алексеев С.В. Особенности механической обработки деталей из керамических материалов // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2012. Т. 2, № 2 (14). С. 64–67.
8. Душко О.В., Мышлинская И.Х., Перфилов В.А. Обработка изделий из высокотвердой керамики // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер. Строительство и архитектура. 2014. № 38. С. 65–74.
9. Заковоротный В.Л., Латишин В.П., Туркин И.А. Управление процессом сверления глубоких отверстий спиральными сверлами на основе синергетического подхода // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер. Технические науки. 2014. № 3(178). С. 33–41.
10. Калихман С.А., Резюков И.В. Электроимпульсная калибровка капиллярных отверстий // Труды Академии электротехнических наук Чувашской Республики. 1999. № 1–2. С. 128–133.
11. Моргунов Ю.А., Опальницкий А.И., Перепечкин А.А. Современное состояние и перспективы применения в отрасли ультразвуковой размерной обработки изделий // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2012. № 2. С. 140–144.
12. Пат. 2457935 РФ, МПК В24D18/00, В24D3/06, В23К35/24. Способ получения абразивного инструмента из сверхтвердых материалов / Е.Г. Соколов, А.Д. Козаченко (РФ). № 2010145573/02; Заявл. 09.11.2010; Оpubл. 10.08.2012. Бюл. № 22. 6 с.
13. Поляков З.И., Исаков В.М., Исаков Д.В., Шамин В.Ю. Электрофизические и электрохимические методы обработки. 2-е изд., перер. и доп. Челябинск: Южноуральский гос. ун-т, 2006. 89 с.
14. Резюков И.В. Исследование зависимости температуры канала капиллярного разряда от введенной энергии // Вестник Чувашского университета. 1997. № 1. С. 145–152.
15. Резюков И.В. Методология моделирования электрофизической калибровки отверстий // Энергетика и электротехника: актуальные проблемы и решения: сб. науч. тр. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2007. С. 189–195.
16. Charschan S.S. Lasers as Production Tools. *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, 1975, vol. IECI-22, iss. 1, pp. 3–8.

17. Chang-Seung Ha, Dong-Hyun Kim, Ho-Jun Lee, Hae June Lee, Hyun Seok Tak, Myung Chang Kang. Development of a pulse driven micro-electrical discharge machining for micro-hole boring. *Plasma Science – Abstracts*, 2009. ICOPS 2009. IEEE International Conference. San Diego, 2009, p. 1.

18. Kuzin V.V. Technology for machining high-refractory ceramic parts based on silicon nitride. *Refractories and Industrial Ceramics*, 2006, vol. 47, no. 4, pp. 204–208.

19. Goktas H., Kirkici H., Oke G., Udrea M.V. Microprocessing by intense pulsed electron beam. *Udrea IEEE Transactions on Plasma Science*, 2002, vol. 30, iss. 5, pp. 1837–1842.

РЕЗИУКОВ ИГОРЬ ВАСИЛЬЕВИЧ – доцент, заведующий кафедрой безопасности жизнедеятельности и инженерной экологии, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (kafedra.safety@mail.ru).

РЕЗИУКОВА ЛЮДМИЛА ВЛАДИМИРОВНА – кандидат экономических наук, доцент кафедры отраслевой экономики, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (rezjukovymi@yandex.ru).

I. REZYUKOV, L. REZYUKOVA

THE MODERN STATE OF ELECTROPHYSICAL METHODS DIMENSIONAL TREATMENT OF SMALL HOLES IN DETAILS OF THE BRITTLE NON-METALLIC MATERIALS

Key words: *dimensional processing, calibration, capillary holes, electric pulse technology, parts made of brittle nonmetallic materials.*

The existing technology of dimensional processing of small-diameter holes in parts made of superhard and brittle materials has been analyzed. As a result insufficient precision and quality of processing, the need to use expensive and sophisticated tools and equipment, tweaking of sizes and elimination of roughness of the inner surface of the holes by abrasive materials, with high requirements to skilled workers have been revealed. This explains the low productivity of these technologies. In addition, the existing methods of dimensional processing of capillary holes make it possible to mechanize and automate these processes. Technology of producing holes of given radius by electric pulse method has been proposed and experimentally tested, which eliminates these drawbacks. The mathematical model of the processes occurring during the expansion of the capillary holes in dielectric materials by means of pulsed arcs, movement of the temperature front created by the arc channel in the body of the capillary in particular, has been developed. The result of experimental research was the creation of automatic system, allowing to calibrate holes in micro tool blanks used for term compressive welding in automatic assembly of integrated circuits.

References

1. Ablyaz T.R., Khanov A.M., Khurmatullin O.G. *Sovremennyye podkhody k tekhnologii elektroerozionnoi obrabotki material* [Modern approaches to technology of electroerosion processing of materials]. Perm, Perm National Research Polytechnic University Publ., 2012, 112 p.

2. Akhmetzyanov I.D., Vereshchagin I.P., Rezyukov I.V. *Sposob izgotovleniya otverstii malogo diametra* [A method of manufacturing a small diameter holes]. Patent USSR 1685046, 1991.

3. Balykov A.V. *Almaznoe sverlenie otverstii v detalyakh iz khrupkikh nemetallicheskih materialov* [Diamond drilling of holes in parts made of brittle nonmetallic materials]. Moscow, Nauka i tekhnologii Publ., 2003, 187 p.

4. Boiko A.F., Blinova T.A. *Kratkii analiz konstruksii i tekhnologii proizvodstva instrumenta dlya mikrosvarki i mikroapai* [The short analysis of a design and the production technology of the tool for microwelding and the microsoldering]. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal* [The International research magazine], 2013, no. 12-1(19), pp. 45–48.

5. Brzhozovskii B.M., Bekrenev N.V. *Ultrazvukovyye tekhnologicheskie protsessy i oborudovanie v ma-shino- i priborostroenii* [Ultrasonic technological processes and equipment in machine building and instrument making]. Saratov, Saratov State Tech. University Publ., 2009, 348 p.

6. Burdovitsin V.A., Klimov A.S., Oks E.M. *Elektronno-luchevaya obrabotka dielektrikov plazmennym istochnikom elektronov v forvakuunnoi oblasti davlenii* [Electron-beam processing of

dielectrics by plasma source of electrons in roughing pressures]. *Elektronnye sredstva i sistemy upravleniya* [Electronic tools and control systems], 2009, no. 1, pp. 185–188.

7. Gorelov V.A., Alekseev S.V. *Osobennosti mekhanicheskoi obrabotki detalei iz keramicheskikh materialov* [Features of machining of ceramic materials]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI* [Bulletin of Moscow state technical University MAMI], 2012, vol. 2, no. 2(14), pp. 64–67.

8. Dushko O.V., Myshlinskaya I.Kh., Perfilov V.A. *Obrabotka izdelii iz vysokotverdoi keramiki* [Processing products from extra-hard ceramics]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Construction. Series: Construction and architecture], 2014, no. 38, pp. 65–74.

9. Zakovorotnyi V.L., Lapshin V.P., Turkin I.A. *Upravlenie protsessom sverleniya glu-bokikh otverstii spiral'nyimi sverlami na osnove sinergeticheskogo podkhoda* [Managing the process of drilling deep-hole twist drill bits on the basis of synergetic approach]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Seriya: Tekhnicheskie nauki* [News of higher educational institutions. The North Caucasus region. Series: Technical science], 2014, no. 3(178), pp. 33–41.

10. Kalikhman S.A., Rezyukov I.V. *Elektroimpul'snaya kalibrovka kapillyarnykh otverstii* [This involves calibration of the capillary holes]. *Trudy Akademii elektrotekhnicheskikh nauk Chuvashskoi Respubliki* [Proc. of the Academy of Electrotechnical Sciences of the Chuvash Republic], 1999, no. 1–2, pp. 128–133.

11. Morgunov Yu.A., Opal'nitskii A.I., Perepechkin A.A. *Sovremennoe sostoyanie i perspektivy primeneniya v otrasli ul'trazvukovoi razmernoi obrabotki izdelii* [Current status and prospects for use in industry ultrasonic dimensional processing of products]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI* [Bulletin of Moscow State Technical University MAMI], 2012, no. 2, pp. 140–144.

12. Sokolov E.G., Kozachenko A.D. *Sposob polucheniya abra-zivnogo instrumenta iz sverkhтвердых материалов* [A method of producing abrasive tools of superhard materials]. Patent 2457935 RF, 2012.

13. Polyakov Z.I., Isakov V.M., Isakov D.V., Shamin V.Yu. *Elektrofizicheskie i elektro-khimicheskie metody obrabotki. 2-e izd.* [Electrophysical and electrochemical methods of processing. 2nd ed.]. Chelyabinsk, South Ural State University Publ, 2006, 89 p.

14. Rezyukov I.V. *Issledovanie zavisimosti temperatury kanala kapillyarnogo razryvada ot vvedennoi energii* [The study of temperature dependence of the capillary discharge channel from input energy]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 1997, no. 1, pp. 145–152.

15. Rezyukov I.V. *Metodologiya modelirovaniya elektrofizicheskoi kalibrovki otverstii* [The methodology of modeling electrical calibration of holes]. *Energetika i elektrotekhnika: aktual'nye problemy i resheniya: sb. nauch. tr.* [Power industry and electrical engineering: current problems and solutions: Collection of scientific papers]. Cheboksary, Chuvash State University Publ., 2007, pp. 189–195.

16. Charschan S.S. Lasers as Production Tools. *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, 1975, vol. IECI-22, iss. 1, pp. 3–8.

17. Chang-Seung Ha, Dong-Hyun Kim, Ho-Jun Lee, Hae June Lee, Hyun Seok Tak, Myung Chang Kang. Development of a pulse driven micro-electrical discharge machining for micro-hole boring. *Plasma Science – Abstracts*, 2009. ICOPS 2009. IEEE International Conference. San Diego, 2009, p. 1.

18. Kuzin V.V. Technology for machining high-refractory ceramic parts based on silicon nitride. *Refractories and Industrial Ceramics*, 2006, vol. 47, no. 4, pp. 204–208.

19. Goktas H., Kirkici H., Oke G., Udrea M.V. Microprocessing by intense pulsed electron beam. *Udrea IEEE Transactions on Plasma Science*, 2002, vol. 30, iss. 5, pp. 1837–1842.

REZYUKOV IGOR – Associate Professor, Head of Department Life Safety and Engineering Ecology Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

REZYUKOVA LYUDMILA – Candidate of Economics Sciences, Associate Professor of Industrial Economics Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

Ссылка на статью: Резюков И.В., Резюкова Л.В. Современное состояние электрофизических методов размерной обработки отверстий малого диаметра в деталях из хрупких неметаллических материалов // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 76–85.

УДК 621.365.5, 621.78.012.5

ББК 31.292, 34.651

Л.Э. РОГИНСКАЯ, А.С. ГОРБУНОВ

ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ИНДУКТОРОВ КОМПЛЕКСНЫХ ЭЛЕКТРОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ УСТАНОВОК ДЛЯ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА С ДОБАВОЧНЫМИ ПРОВОДЯЩИМИ СРЕДАМИ С ПРОРЕЗЬЯМИ

Ключевые слова: индукционный нагрев, индукционная установка, электротехнологическая установка, индуктор, добавочная проводящая среда, прорезь, электромагнитное поле, магнитное поле, электрическое поле, плотность тока.

Рассмотрены конструкции комплексных электротехнологических установок с индукторами с добавочными проводящими средами с прорезьями и без для индукционного нагрева деталей. Разработана математическая модель, позволяющая рассчитывать основные параметры этих установок и области их рациональных величин. Путем расчетов ряда вариантов устройств доказаны целесообразность и эффективность использования данной модели. Приведены графики распределения напряженности магнитного, электрического поля и плотности тока, полученные по результатам исследований.

1. Описание комплексных электротехнологических установок с индукционным нагревом. В настоящее время в связи с развитием установок для индукционного нагрева широко применяются разнообразные конфигурации нагреваемых деталей, включая нагрев для термообработки, плавки, заковки, пайки, нанесения покрытий на поверхность и т.д.

Для достижения требуемых показателей обрабатываемой поверхности деталей используется комплекс индукторов определенной конструкции, среди которых можно отметить как цилиндрические многовитковые, одновитковые, индукторы с магнитопроводами для нагрева под закалку плоских поверхностей, индукторы с добавочной проводящей средой: индукторы-трансформаторы, индукторы-концентраторы, индукторы для нагрева деталей в холодном тигле [1, 5, 9], индукторы для обеспечения нанесения защитных покрытий на изделия [3] и др.

Одними из наиболее перспективных типов индукторов являются индукторы с промежуточной проводящей средой [1–3, 5–9], внутри которой находятся нагреваемые детали. Среди таких комплексов особое место занимают устройства с прорезьями (воздушными промежутками) в такой среде, в качестве которых могут быть как зазоры между трубками водоохлаждаемого тигля [5], так и прорези, сделанные вдоль стального полого цилиндра, представляющего собой добавочную проводящую среду, для повышения энергетических показателей устройств с обеспечением более полного проникновения электромагнитного поля индуктора к термообрабатываемым изделиям [7] и т.д.

В случаях, когда по требованиям технологических процессов необходимо обеспечение герметичности добавочной проводящей среды, данная прорезь может быть закрыта диэлектрическим жаропрочным материалом.

В [3] приведена и описана схема одного из вариантов комплексной электротехнологической установки с индуктором с промежуточной проводящей средой. На рис. 1 показана фотография одной из секций такого индуктора, разработанного и изготовленного при непосредственном участии авторов [2].

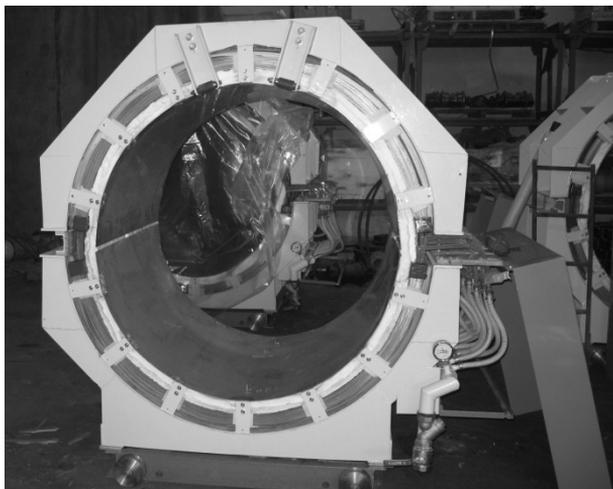


Рис. 1. Индуктор с добавочной проводящей средой (секция)

В литературе приводятся сведения о конструкции, принципе работы ряда установок с указанными выше индукторами [1, 4, 5, 9], однако практически отсутствуют сведения о математическом моделировании и расчете основных параметров комплексов для индукционного нагрева с добавочной средой с прорезями.

Определение основных параметров и областей их рациональных значений представляет собой важную научно-техническую задачу, поскольку позволит разрабатывать новые комплексные установки с промежуточными средами с прорезями с учетом влияния последних на параметры электромагнитного поля индуктора, поскольку использование прорезей, как показали предыдущие исследования [7], значительно влияет на показатели таких устройств. На основе математической модели значительно облегчаются и уточняются расчет и проектирование этих комплексных электротехнологических установок с индукционным нагревом.

2. Математическая модель комплексных электротехнологических установок с добавочными проводящими средами с прорезями. Авторами разработана математическая модель рассматриваемой установки, позволяющая рассчитывать основные параметры электромагнитного поля, плотность тока, а также определять основные рациональные параметры устройств. Расчетная схема комплекса показана на рис. 2.

На рис. 2 приведены: 1 – катушка индуктора, 2 – прорезь, 3 – цилиндр, 4 – термообрабатываемая заготовка, $R_{и}$ – внутренний радиус катушки индуктора, R_1 – наружный радиус промежуточной проводящей среды, R_2 – внутренний радиус цилиндра, $R_д$ – внешний радиус термообрабатываемой заготовки.

Для упрощения расчетов ограничимся наличием одной прорези в материале цилиндра.

Допущения, принимаемые при исследовании электромагнитных процессов и разработке математической модели, соответствуют принимаемым в предыдущих исследованиях [7–9]. Однако при моделировании работы ком-

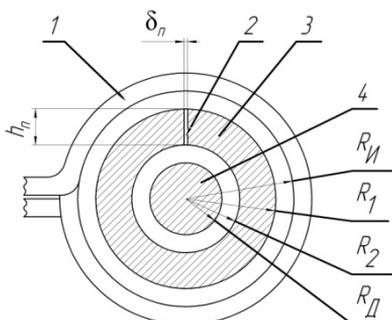


Рис. 2. Схема индуктора с добавочной проводящей средой с прорезью

плексов с прорезями в добавочных средах следует особо отметить следующие допущения [7]:

1. Ширина прорези δ_n очень мала и для расчетов принимается равной нулю.

2. Высота прорези h_n (толщина цилиндра) намного меньше его высоты.

3. Значение напряженности магнитного поля на внешней и внутренней поверхностях добавочной проводящей среды равны.

4. Параметры электромагнитного поля и плотность тока не изменяются скачкообразно при переходе из одной области в другую (индуктор – воздушный промежуток – промежуточная среда – воздушный промежуток – термообрабатываемая заготовка).

Выражение для напряженности магнитного поля индуктора [7] в материале добавочной проводящей среды с прорезями

$$\dot{H}_m = c_1 \cdot J_0 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot R}{\Delta} \cdot \sqrt{-j} \right) + c_2 \cdot N_0 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot R}{\Delta} \cdot \sqrt{-j} \right), \quad (1)$$

где c_1 , c_2 – постоянные; J_0 – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка; N_0 – функция Бесселя второго рода, нулевого порядка; R – радиус цилиндра, м; Δ – глубина проникновения тока в материал добавочной проводящей среды, м.

В данном выражении, в отличие от известных работ, важное значение имеет задача определения постоянных c_1 и c_2 при различных параметрах индуктора, промежуточной проводящей среды и разных частотах. Эти постоянные определяются из граничных условий, которыми являются значения напряженности магнитного поля и плотности тока на границах сред: полый цилиндр–воздух [9].

Постоянные c_1 и c_2 в исследуемой установке [7] определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{H}_{mнар} = c_1 \cdot J_0 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot R_1}{\Delta} \cdot \sqrt{-j} \right) + c_2 \cdot N_0 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot R_1}{\Delta} \cdot \sqrt{-j} \right); \\ \dot{H}_{mвнутр} = c_1 \cdot J_0 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot R_2}{\Delta} \cdot \sqrt{-j} \right) + c_2 \cdot N_0 \left(\frac{\sqrt{2} \cdot R_2}{\Delta} \cdot \sqrt{-j} \right), \end{cases} \quad (2)$$

где $\dot{H}_{mнар}$ – напряженность магнитного поля на наружном радиусе добавочной проводящей среды, А/м; $\dot{H}_{mвнутр}$ – напряженность магнитного поля на внутреннем радиусе добавочной проводящей среды, А/м.

В рассматриваемом случае $\dot{H}_{mнар} = \dot{H}_{mвнутр}$.

Напряженность электрического поля и плотность тока в материале промежуточной среды [8, 9] определяются выражениями

$$\dot{E}_m = -\rho \cdot \frac{d\dot{H}_m}{dR}; \quad (3)$$

$$\dot{\delta}_m = -\frac{dH_m}{dR}, \quad (4)$$

где ρ – удельное сопротивление материала добавочной проводящей среды, Ом·м.

Уравнения (1)–(4) при различных параметрах цилиндра и различных частотах были решены в относительных единицах с помощью пакетов *Mathcad* и *Mathematica*, результаты приведены на рис. 3–8.

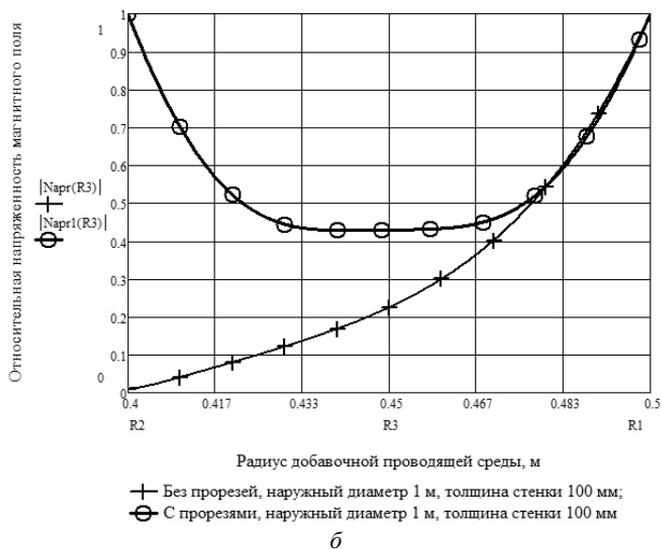
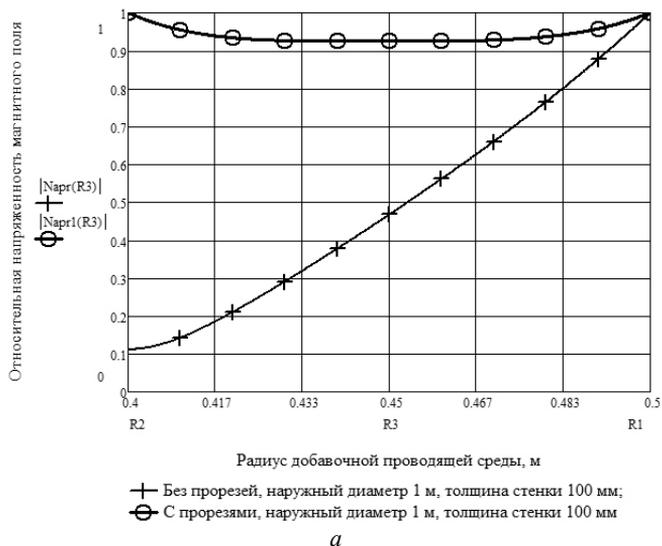


Рис. 3. Распределение напряженности магнитного поля в цилиндре с наружным диаметром 0,5 м: а – при частоте 50 Гц; б – при частоте 250 Гц

Как видно из графиков на рис. 3–8, напряженность электромагнитного поля и плотность тока сильно изменяются по радиусу добавочной среды. В предыдущих работах [2, 3, 6] было установлено, что при значительных размерах цилиндра и высокой частоте значительно снижается величина напряженности магнитного поля, например, при частоте 50 Гц, внешнем диаметре свыше 1,2 м и толщине стенки свыше 20 мм ослабление составляет более 60%. В рассмотренном на рис. 3, а случае при частоте 50 Гц, наружном диаметре добавочной среды 0,5 м и толщине стенки 100 мм в случае отсутствия прорезей снижение напряженности магнитного поля составляет около 89%. При применении частоты 250 Гц поле практически полностью (рис. 3, б) затухает в полом цилиндре и в результате не достигает нагреваемых деталей. Использование добавочной среды (рис. 3, а, б) позволяет, как видно из данных графиков, не только увеличить напряженность магнитного поля в середине толщи цилиндра (например, при частоте 50 Гц на участке $R = 0,45$ м напряженность магнитного поля в относительных единицах равна 0,92 и 0,47, соответственно, для случаев с прорезями и без прорезей), но и выравнять значения напряженности магнитного поля на внешнем и внутреннем радиусах промежуточной среды, т.е. происходит эффективное проникновение электромагнитного поля внутрь цилиндра, тем самым обеспечивается возможность рационального индукционного нагрева заготовок, находящихся внутри добавочной среды.

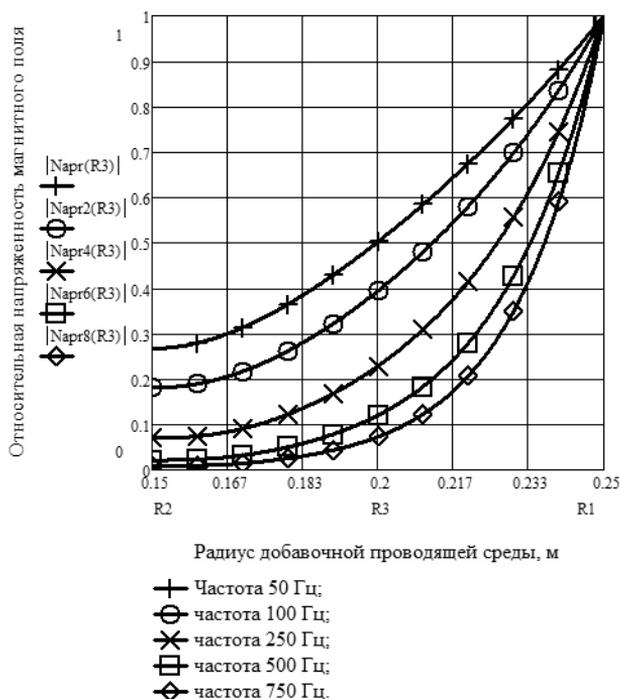


Рис. 4. Распределение напряженности магнитного поля в промежуточной среде с наружным диаметром 0,5 м и толщиной стенки 100 мм без прорезей

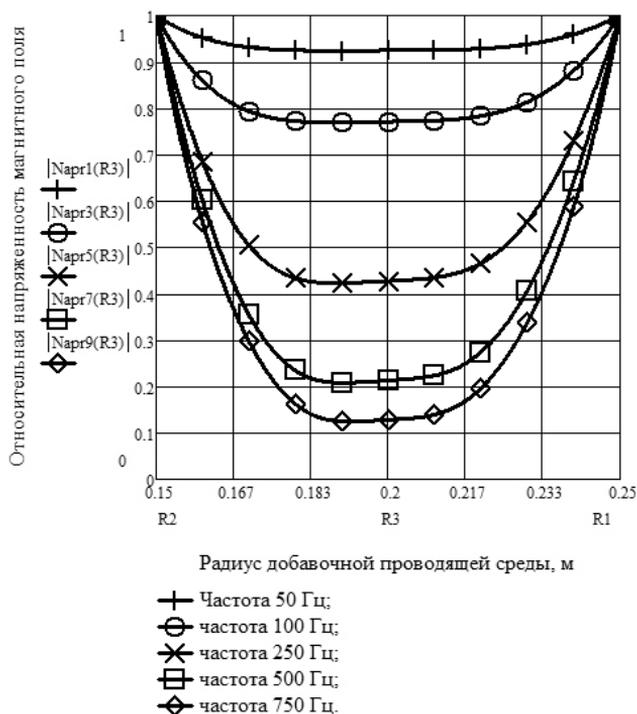


Рис. 5. Распределение напряженности магнитного поля в добавочной среде с наружным диаметром 0,5 м и толщиной стенки 100 мм с прорезями

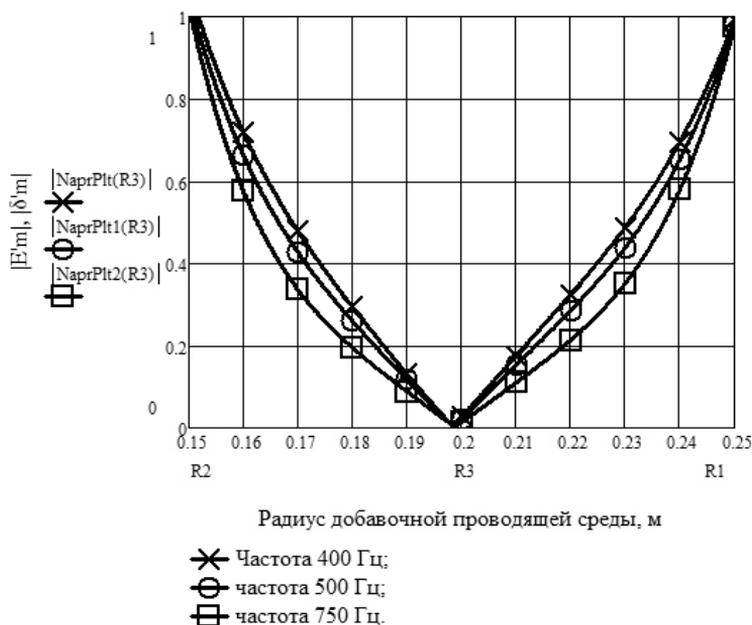


Рис. 6. Распределение напряженности электрического поля и плотности тока в цилиндре с наружным диаметром 0,5 м и толщиной стенки 100 мм

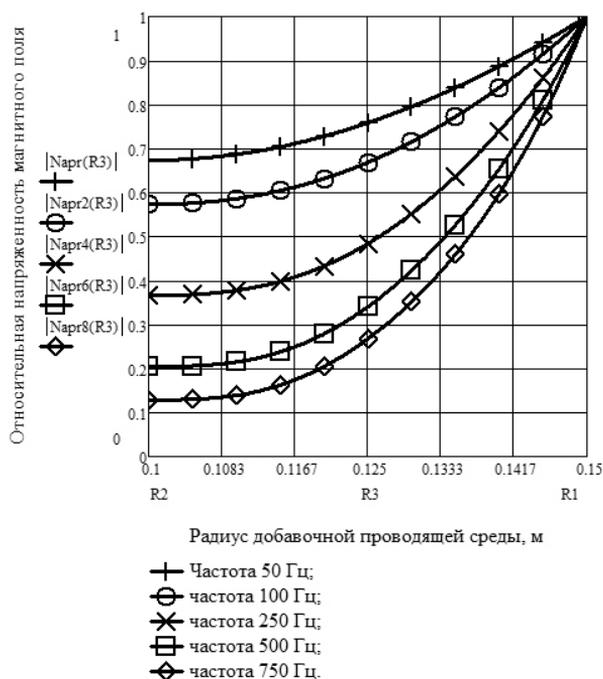


Рис. 7. Распределение напряженности магнитного поля в промежуточной среде с наружным диаметром 0,3 м и толщиной стенки 50 мм без прорезей

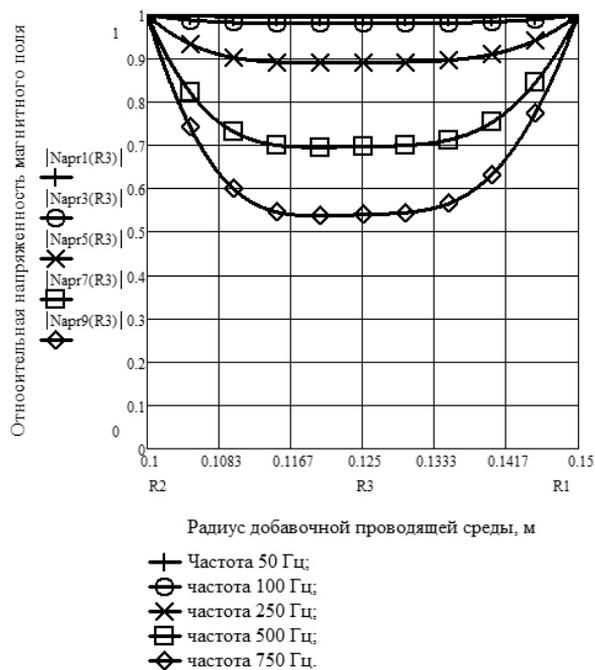


Рис. 8. Распределение напряженности магнитного поля в добавочной среде с наружным диаметром 0,3 м и толщиной стенки 50 мм с прорезями

На рис. 4, 5 построено семейство кривых напряженности магнитного поля, определенных для комплексных электротехнологических установок с добавочными проводящими средами с наружным диаметром 0,5 м, толщиной стенки 100 мм при частотах 50, 100, 250, 500, 750 Гц с прорезями и без прорезей. Из графиков видно, что с ростом частоты для устройств без прорезей напряженность магнитного поля на внутреннем радиусе значительно снижается. При частоте 50 Гц напряженность магнитного поля на внутренней поверхности добавочной проводящей среды составляет 28% от значения на внешней поверхности цилиндра (рис. 4). При частотах 500 Гц и выше напряженность магнитного поля на внутреннем радиусе добавочной проводящей среды становится практически равной нулю.

Однако, как видно из рис. 5, при использовании промежуточной среды с прорезями напряженность магнитного поля на внутренней поверхности того цилиндра, как и в предыдущем случае на рис. 3, становится равной напряженности на наружной поверхности добавочной среды, а также увеличивается значение напряженности магнитного поля в середине толщи цилиндра. Например, при частоте 100 Гц на участке $R = 0,2$ м напряженность магнитного поля в относительных единицах равна 0,78 и 0,4, соответственно, для случаев с прорезями и без них.

На рис. 6 получено семейство графиков распределения модулей напряженности электрического поля и плотности тока по сечению добавочной среды с наружным диаметром 0,5 м, толщиной стенки 100 мм с прорезями при частотах 400, 500 и 750 Гц. Как можно отметить, напряженность электрического поля и плотность тока снижаются по модулю до нуля от наружного диаметра к середине толщи цилиндра, а затем у данных параметров меняется знак и, как видно из рис. 6, они возрастают по модулю до исходного значения. При этом при понижении частоты с 750 до 400 Гц спад, а также возрастание напряженности электрического поля и плотности тока происходят практически линейно.

На рис. 7, 8 построено семейство кривых напряженности магнитного поля, определенных для комплексных электротехнологических установок с добавочными проводящими средами с наружным диаметром 0,3 м, толщиной стенки 50 мм при частотах 50, 100, 250, 500, 750 Гц с прорезями и без них.

Аналогично с предыдущими случаями видно значительное ослабление напряженности магнитного поля на внутреннем радиусе цилиндра для цилиндров без прорезей. При частоте 50 Гц напряженность магнитного поля на внутренней поверхности добавочной проводящей среды составляет 68% от значения на внешней поверхности цилиндра (рис. 7). Повышение частоты приводит к значительному снижению напряженности магнитного поля на внутреннем радиусе промежуточной среды. Например, при частоте 750 Гц снижение данной напряженности составляет 88%.

Из рис. 8 видно, что, как и для предыдущих вариантов цилиндров, применение прорезей в добавочной проводящей среде значительно улучшает показатели электромагнитного поля, обеспечивающего нагрев деталей внутри данного цилиндра. В данном случае напряженность магнитного поля на внутренней поверхности промежуточной среды становится равна напряженности на наружном радиусе добавочной среды. Кроме того, при частотах до 100 Гц практически не происходит снижения величины напряженности магнитного поля внутри толщи цилиндра.

Выводы. 1. Авторами разработана математическая модель комплексной электротехнологической установки с добавочными проводящими средами с прорезями. Путем расчетов ряда вариантов данных устройств было установлено, что созданная методика позволяет с высокой точностью определять основные параметры таких комплексов, а также находить области их рациональных значений.

2. Как показали исследования, применение добавочной проводящей среды с прорезями позволяет решить проблему затухания электромагнитного поля в электротехнологических установках с индукционным нагревом с промежуточными проводящими средами, например, в установках с индукционным нагревом для нанесения защитных покрытий при различных параметрах добавочных проводящих сред как на промышленной, так и на повышенной частотах. Таким образом, можно сказать, что такие конструкции промежуточных проводящих сред являются концентраторами электромагнитного поля, так как позволяют сконцентрировать поле внутри цилиндра для эффективного нагрева находящихся там деталей, в отличие от установок с полыми цилиндрами без прорезей.

3. Изменение параметров добавочных проводящих сред и частоты в установках с прорезями приводит к изменению величины напряженности магнитного поля в середине толщи цилиндра, но на внутренней поверхности всегда сохраняется значение, равное напряженности на внешней поверхности промежуточной среды, что говорит о высокой эффективности такого способа улучшения показателей рассматриваемых комплексных электротехнологических установок с индукционным нагревом с добавочными проводящими средами.

4. Напряженность электрического поля и плотность тока в добавочной проводящей среде изменяются от исходного значения на ее внешней поверхности до нуля в середине толщи цилиндра, а затем возрастают до первоначального значения при достижении внутренней поверхности промежуточной проводящей среды. При небольших частотах (400 Гц и менее) такое снижение и повышение значений указанных параметров имеют практически линейный характер, что позволяет удобно для дальнейших расчетов и с высокой точностью представить данные изменения прямыми линиями.

Литература

1. *Бабат Г.И.* Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1965. 551 с.

2. *Горбунов А.С.* Влияние частоты и толщины стенки добавочной проводящей среды на эффективность индукционного нагрева // Научные исследования и образовательные практики в XXI веке: состояние и перспективы развития: сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. (30 сентября 2015 г.). Смоленск: ООО «НОВАЛЕНСО», 2015. С. 131–133.

3. *Горбунов А.С., Рогинская Л.Э., Таназлы И.Н.* Расчет индукторов и экспериментальное исследование индукционных установок с согласующими трансформаторами // Вестник Чувашского университета. 2015. № 3. С. 26–39.

4. *Кувалдин А.Б.* Индукционный нагрев ферромагнитной стали. М.: Энергоатомиздат, 1988. 200 с.

5. *Петров Ю.Б.* Индукционная плавка окислов. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1983. 104 с.

6. *Рогинская Л.Э., Горбунов А.С.* Влияние диаметра промежуточной цилиндрической проводящей среды при индукционном нагреве деталей токами промышленной частоты // Во-

просы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. (31 мая 2014 г.): в 11 ч. Тамбов: ООО Консалтинговая компания Юком, 2014. Ч. 5. С. 117–120.

7. Рогинская Л.Э., Горбунов А.С. Расчет электромагнитного поля в комплексных электротехнологических установках для индукционного нагрева // Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, № 2(63). С. 61–68.

8. Рогинская Л.Э., Горбунов А.С., Шуляк А.А. Расчет параметров комплексной электротехнологической установки, включающей индукционный нагрев деталей // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 6. URL: <http://www.science-education.ru/106-8042> (дата обращения: 11.01.2016).

9. Слухоцкий А.Е., Рыскин С.Е. Индукторы для индукционного нагрева. Л.: Энергия, 1974. 264 с.

РОГИНСКАЯ ЛЮБОВЬ ЭММАНУИЛОВНА – доктор технических наук, профессор кафедры электромеханики, Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия, Уфа (roginskaya36@mail.ru).

ГОРБУНОВ АНТОН СЕРГЕЕВИЧ – кандидат технических наук, ассистент кафедры электромеханики, Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия, Уфа (freizer-anton@yandex.ru).

L. ROGINSKAYA, A. GORBUNOV
THE MAIN PARAMETERS OF INDUCTORS
OF COMPLEX ELECTROTECHNOLOGICAL SYSTEMS
FOR INDUCTION HEATING WITH ADDITIONAL CONDUCTING MEDIUMS
WITH SLOTS

Key words: *induction heating, induction system, electrotechnological system, inductor, additional conducting medium, slot, electromagnetic field, magnetic field, electric field, current density.*

We considered constructions of complex electrotechnological systems with inductors with additional conducting mediums with slots and without slots for induction heating of details. The mathematical model allowing to calculate main parameters of these installations and areas of their efficient values is developed. We proved feasibility and efficiency of use of this model by calculations of a number of variants of devices. The diagrams of distribution of magnetic intensity, electric intensity and current density received by results of researches are provided.

References

1. Babat G.I. *Induktsionnyi nagrev metallov i ego promyshlennoe primeneniye* [Induction heating of metals and its industrial application]. Moscow, Energiya Publ., 1965, 551 p.

2. Gorbunov A.S. *Vliyanie chastoty i tolshchiny stenki dobavochnoi provodyashchei sredy na effektivnost' induktsionnogo nagreva* [Influence of frequency and thickness of a wall of additional conducting medium on efficiency of induction heating]. *Nauchnye issledovaniya i obrazovatel'nye praktiki v XXI veke: sostoyaniye i perspektivy razvitiya: sb. nauch. tr. po materialam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (30 sentyabrya 2015 g.)* [Proc. of Int. Sci. Conf. «Scientific researches and educational practices in the XXI century: state and prospects for the development»]. Smolensk, NOVA-LENZO Publ., 2015, pp. 131–133.

3. Gorbunov A.S., Roginskaya L.E., Thanazly I.N. *Raschet induktorov i eksperimental'noye issledovanie induktsionnykh ustanovok s soglasuyushchimi transformatorami* [Inductors calculation and experimental research of induction-heating machines with matching transformers]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2015. no. 3. pp. 26–39.

4. Kuvaldin A.B. *Induktsionnyi nagrev ferromagnitnoi stali* [Induction heating of ferromagnetic steel]. Moscow, Enegoatomizdat Publ., 1988, 200 p.

5. Petrov Yu.B. *Induktsionnaya plavka okislov* [Induction melting of oxides]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1983, 104 p.

6. Roginskaya L.E., Gorbunov A.S. *Vliyanie diametra promezhutochnoi tsilindricheskoi provodyashchei sredy pri induktsionnom nagreve detalei tokami promyshlennoi chastoty* [Influence of the diameter of intermediate cylindrical conducting medium in case of induction heating of details by means of power currents]. *Voprosy obrazovaniya i nauki: teoreticheskii i metodicheskii aspekty: sb. nauch. tr. po materialam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (31 maya 2014 g.): v 11 ch. Ch. 5* [Proc. of Int. Sci. Conf. «Questions of science and education: theoretical and methodical aspects». 11 parts. Part 5]. Tambov, 2014. pp. 117–120.

7. Roginskaya L.E., Gorbunov A.S. *Raschet elektromagnitnogo polya v kompleksnykh elektrotekhnologicheskikh ustanovkakh dlya induktsionnogo nagreva* [Calculation of electromagnetic field in complex electrotechnological systems for induction heating]. *Vestnik UGATU* [Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University)], 2014, vol. 18, no. 2 (63), pp. 61–68.

8. Roginskaya L.E., Gorbunov A.S., Shulyak A.A. *Raschet parametrov kompleksnoi elektrotekhnologicheskoi ustanovki, vklyuchayushchei induktsionnyi nagrev detalei* [Calculation of parameters of the complex electrotechnological system, including induction heating of details]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education], 2012, no. 6. Available at: <http://www.science-education.ru/106-8042> (Accessed 11 Jan. 2016).

9. Slukhotskii A.E., Ryskin S.E. *Induktory dlya induktsionnogo nagreva* [Inductors for induction heating]. Leningrad, Energiya Publ., 1974, 264 p.

ROGINSKAYA LYUBOV – Doctor of Technical Sciences, Professor of Electromechanics Department, Ufa State Aviation Technical University, Russia, Ufa.

GORBUNOV ANTON – Candidate of Technical Sciences, Assistant Lecturer of Electromechanics Department, Ufa State Aviation Technical University, Russia, Ufa.

Ссылка на статью: Рогинская Л.Э., Горбунов А.С. Основные параметры индукторов комплексных электротехнологических установок для индукционного нагрева с добавочными проводящими средами с прорезями // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 86–96.

УДК 621.313.12:681.518.5

ББК 31.27-082

А.С. СТЕКЛОВ, А.В. СЕРЕБРЯКОВ, В.Г. ТИТОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СУДОВЫХ СИНХРОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРО-НЕЧЕТКИХ СЕТЕЙ

Ключевые слова: искусственная нейронная сеть, синхронный генератор, диагностирование, степень работоспособности.

Задача разработки систем диагностики судовых энергетических установок является актуальной для обеспечения безопасности мореплавания. Одним из путей решения задачи является применение искусственных нейронных сетей. Впервые предложен комплексный подход к определению степени работоспособности судовых синхронных генераторов на основе искусственных нейронных сетей. Полученные результаты могут быть основой для создания новой системы прогнозирования технического состояния судовых синхронных генераторов на основе нейронных сетей.

Надежность, экономичность и безопасность функционирования судна в значительной степени определяется уровнем эксплуатационной надежности электрооборудования силовой электроэнергетической установки (ЭЭУ) (синхронные генераторы (СГ), гребные электродвигатели, трансформаторы, преобразователи частоты). Поэтому представляется целесообразным оценить степень работоспособности и спрогнозировать дальнейшую эксплуатацию в первую очередь СГ, от уровня технического состояния которого зависит работоспособность установки в целом [4].

Современные адаптивные системы на базе таких инструментов искусственного интеллекта (ИИ), как искусственные нейронные сети (ИНС) и нечеткая логика (НЛ), способны решить эту проблему благодаря способностям к обучению, запоминанию и аппроксимации входных данных [1].

Для реализации процесса нечеткого моделирования предлагается использовать соответствующую библиотеку нечеткой логики (Fuzzy Logic Toolbox) из пакета MatLab.

Для решения задачи контроля работоспособности СГ необходимо определить параметры, характеризующие состояние генератора. Самыми информативными параметрами для определения неисправностей синхронного генератора являются сопротивление изоляции (R_{iz}), мощность активная (P), мощность реактивная (Q), температура обмотки статора (t_{stat}), температура обмотки ротора (t_{rot}), температура подшипника (t_{podch}), вибрация генератора ($vibracia$) [2].

Для определения степени работоспособности СГ построим две модели нечеткого вывода:

- определение степени работоспособности электрической части;
- определение степени работоспособности неэлектрической части.

В модели экспертной системы для определения степени работоспособности электрической части СГ входными переменными являются сопротивление изоляции (R_{iz}), мощность активная (P), мощность реактивная (Q). Выходной переменной является степень работоспособности электрической части синхронного генератора [5].

На рис. 1 представлена структурная схема определения степени работоспособности электрической части синхронного генератора.

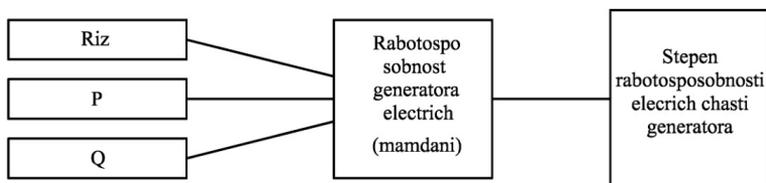


Рис. 1. Структурная схема определения работоспособности электрической части синхронного генератора:

R_{iz} – сопротивление изоляции; P – мощность активная; Q – мощность реактивная; *Stepen rabotospobnosti electricich chasti generatora* (выходная переменная) – степень работоспособности электрической части СГ; *Rabotospobnost generatora electricich (mamdani)* – нечеткая система Мамдани – Заде

Рассмотрим подробно каждый этап создания нейросетевой модели.

Фаззификация входных параметров. Процесс задания нечёткого множества на основе известного количественного значения признака называется фаззификацией, или приведением к нечёткости. Фаззификация – это также процесс нахождения значений функций принадлежности нечётких множеств на основе обычных (не нечётких) исходных данных. Фаззификация позволяет представить объективно присутствующую неточность результатов физических измерений.

На этапе фаззификации значения входных параметров приводятся в соответствии с их нечеткими лингвистическими переменными с последующим выбором закона изменения функции принадлежности.

Лингвистическую оценку значения переменных P и Q будем производить с помощью пяти термов: {«Очень низкое», «Ниже нормы», «Норма», «Выше нормы», «Очень высокое»}, а переменной R_{iz} – с помощью трёх {«Очень низкое», «Ниже нормы», «Норма»}.

Формирование функций принадлежности. При формировании функций принадлежности следует стремиться к тому, чтобы степени принадлежности границ интервала крайним термам были равны единице. В этом случае выполняется естественное правило, заключающееся в том, что чем меньше (больше) значение переменной, тем в большей степени оно соответствует крайнему терму «Очень низкий» («Очень высокий») [3, 6].

Поэтому функции принадлежности крайних термов были заданы трапециевидной функцией принадлежности.

Для всех остальных термов был задан треугольный закон изменения функции принадлежности. Функции принадлежности являются нормальными (нормированными), принимающими значения в интервале от 0 до 1.

На рис. 2 представлен график функции принадлежности «Сопротивление изоляции».

Выходная переменная «Степень работоспособности электрической части синхронного генератора», оцениваемая от 0 до 100 (где 0 – минимальное значение, 100 – максимальное значение степени работоспособности электрической части синхронного генератора). Функции принадлежности выходной

переменной «Степень работоспособности электрической части СГ» представлены на рис. 3.

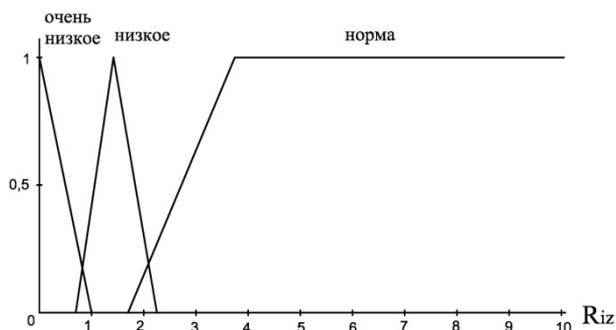


Рис. 2. Функции принадлежности переменной «Сопротивление изоляции» (R_{iz})

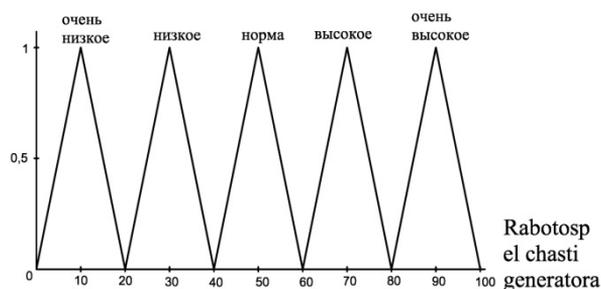


Рис. 3. Функции принадлежности выходной переменной «Степень работоспособности электрической части СГ»

Формирование нечётких логических правил. Причинно-следственные связи между значениями параметров и определенным интервалом степени работоспособности формализуются в виде совокупности нечётких логических правил. Формат базового правила вывода «если – то» (if – then) называется нечёткой импликацией. Условием правила может быть утверждение «Низкое R_{iz} », где «Низкое» – терм, заданный нечётким множеством на универсальном множестве лингвистической переменной R_{iz} . Следствием (заключением) для данного условия может быть «Состояние генератора – 0».

Нечёткая база знаний с информацией о зависимости «Значение параметров – значение степени работоспособности электрической части СГ» содержит лингвистические правила.

Правила задаются экспертами на основе субъективных предпочтений о причине неисправности и не носят случайного характера. Информация может быть представлена в форме правил нечетких продукций. На рис. 4 представлен фрагмент базы правил.

Анализ нейросетевой модели выполняется посредством визуализации поверхности нечеткого вывода. Поверхность системы нечеткого вывода представлена на рис. 5.

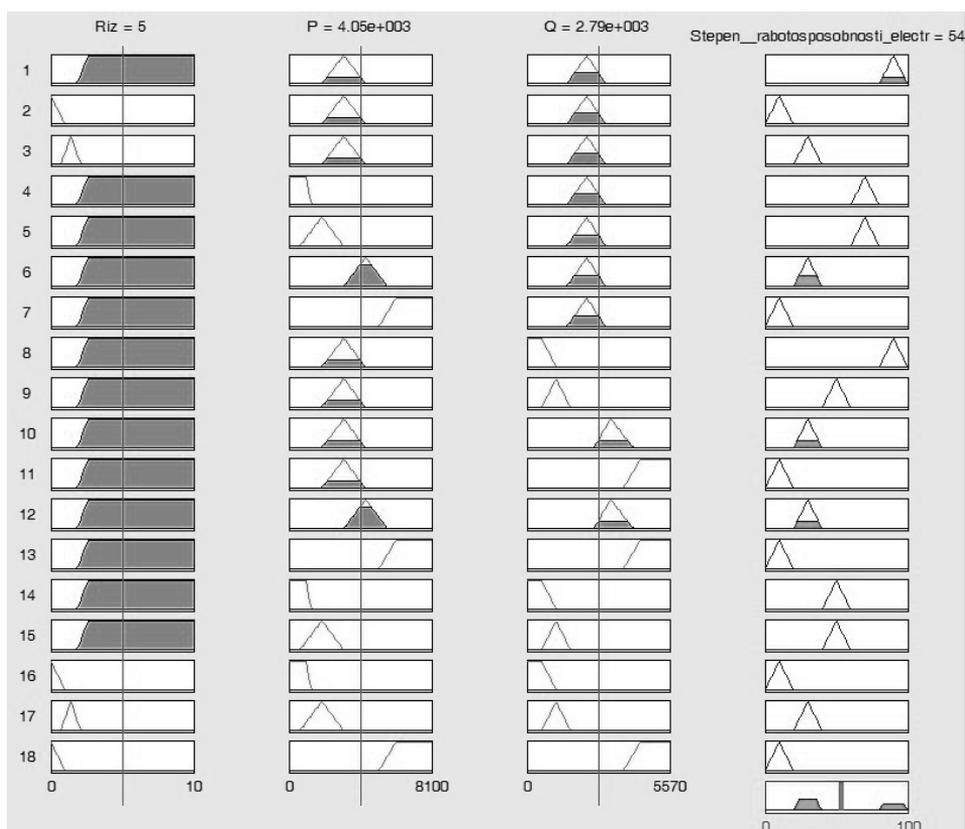


Рис. 4. Просмотр базы правил

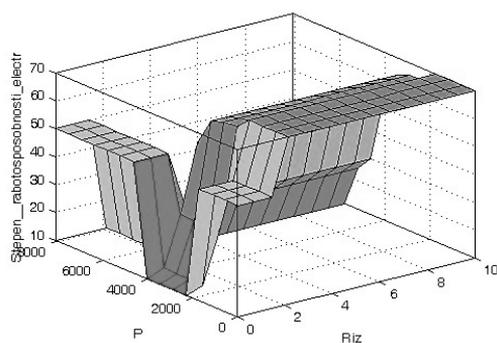


Рис. 5. Поверхность системы нечеткого вывода

Поверхность системы нечеткого вывода позволяет установить зависимость значений выходной переменной от значений входных переменных нечеткой модели. Кроме того, имеется возможность установления зависимости выходной переменной от одной из входных переменных.

В модели экспертной системы для определения степени работоспособности неэлектрической части СГ входными переменными являются четыре параметра: температура обмотки статора (*tstat*), температура обмотки ротора (*trot*),

температура подшипника (*t_{podch}*), вибрация генератора (*vibracia*); выходной переменной – степень работоспособности неэлектрической части синхронного генератора.

На рис. 6 представлена структурная схема определения степени работоспособности неэлектрической части синхронного генератора.

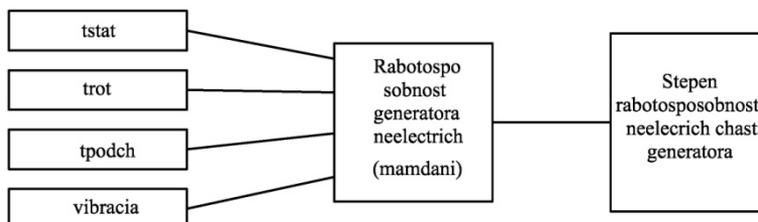


Рис. 6. Структурная схема определения работоспособности неэлектрической части синхронного генератора:

tstat – температура статора; *trot* – температура ротора;

t_{podch} – температура подшипника; *vibracia* – вибрация генератора;

Stepen rabotospobnosti neelectricich chasti generatora (выходная переменная) – степень работоспособности неэлектрической части СГ;

Rabotospobnost generatora neelectricich (mamdani) – нечеткая система Мамдани – Заде

Лингвистическую оценку значения переменных будем производить с помощью пяти термов: {«Очень низкое», «Ниже нормы», «Норма», «Выше нормы», «Очень высокое»}.

Выходная переменная «Степень работоспособности неэлектрической части синхронного генератора» оценивается от 0 до 100 (где 0 – минимальное значение, 100 – максимальное значение степени работоспособности неэлектрической части синхронного генератора).

Создадим нечёткую базу знаний с информацией о зависимости «Значение параметров – значение степени работоспособности неэлектрической части СГ», содержащую лингвистические правила.

Для получения степени работоспособности генератора в целом применим обобщенную степень работоспособности, которая задается как среднее геометрическое степеней работоспособности объекта:

$$SR = \sqrt{SR_{\text{элчасть}} SR_{\text{неэлчасть}}}$$

где *SR* – степень работоспособности СГ в целом; *SR_{элчасть}*, *SR_{неэлчасть}* – степени работоспособности электрической и неэлектрической частей СГ.

Математическая модель вычисления работоспособности синхронного генератора приведена на рис. 7.

В качестве динамической системы принимается синхронный генератор в условиях эксплуатации, для которого определено понятие состояния как совокупности некоторых параметров в данный момент времени. Входными переменными *X₁*, *X₂*, ..., *X_N*, где *N* – число диагностируемых параметров, являются значения, полученные с датчиков системы диагностирования.

Система вычисляет активную и реактивную мощности, значения параметров подаются на нечёткие контроллеры, вычисляются работоспособности отдельно для электрической и неэлектрической частей. Затем определяется общая степень работоспособности синхронного генератора.

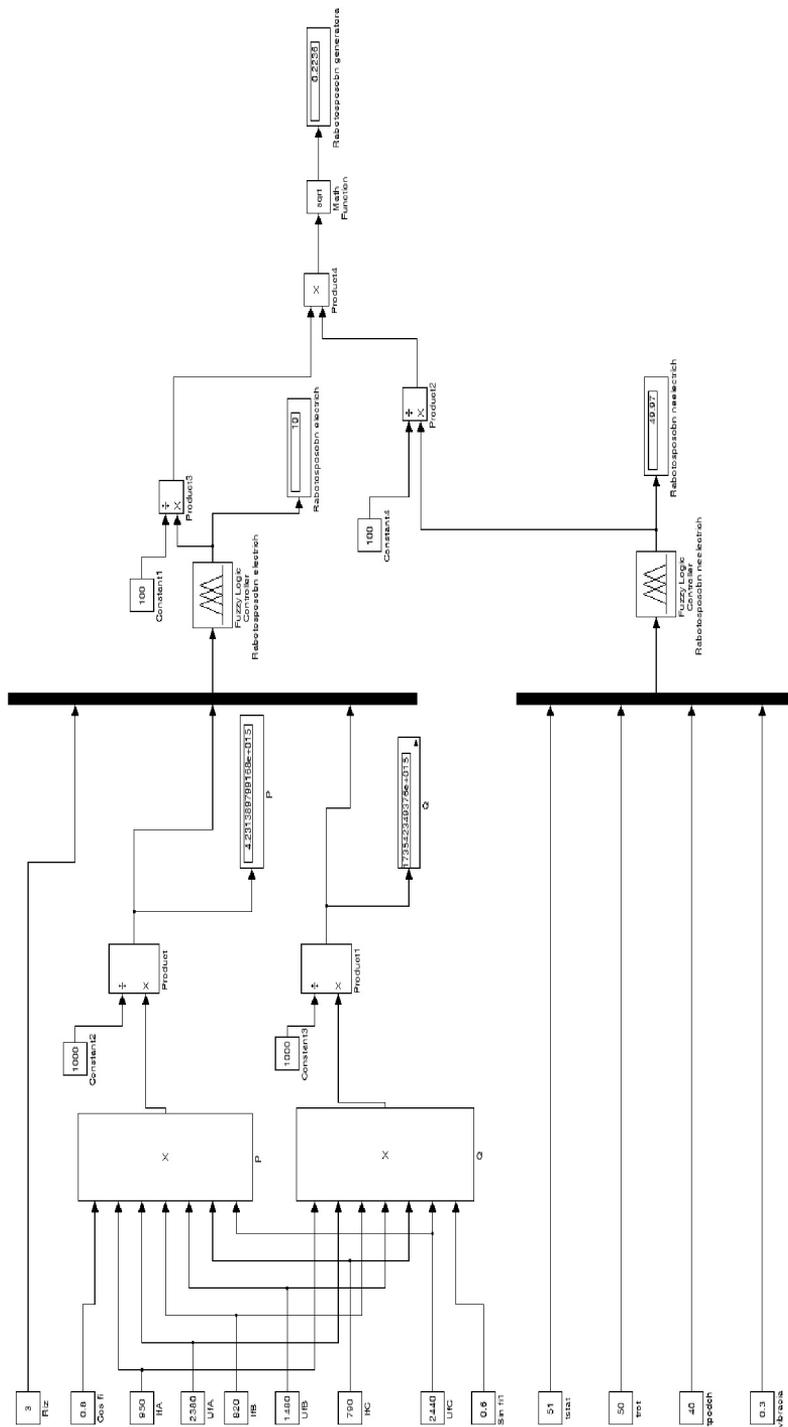


Рис. 7. Вычисление степени работоспособности синхронного генератора в Matlab Simulink

Выводы. Предложен комплексный подход к определению степени работоспособности судовых синхронных генераторов на основе искусственных нейронных сетей. Разработана структурная схема определения работоспособности электрической и неэлектрической частей СГ. Получена поверхность системы нечеткого вывода, позволяющая установить зависимость значений выходной переменной от значений входных переменных нечеткой модели. Разработана математическая модель вычисления степени работоспособности СГ. Полученные результаты могут быть основой для создания новой системы прогнозирования технического состояния судовых синхронных генераторов на основе нейронных сетей.

Литература

1. Дарьенков А.Б., Хватов О.С. Автономная высокоэффективная электрогенерирующая станция // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2009. Т. 77. С. 68–72.
2. Калявин В.П., Рыбаков Л.М. Надежность и диагностика элементов электроустановок СПб.: Элмор, 2009. 336 с.
3. Крюков О.В., Серебряков А.В. Метод и система принятия решений по прогнозированию технического состояния электроприводных газоперекачивающих агрегатов // Электротехнические системы и комплексы. 2015. № 4(29). С. 35–38.
4. Серебряков А.В., Титов В.Г., Чернов Е.А., Шахов А.В. Дифференцирование нагрузки в системах электроснабжения автономных потребителей // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2015. № 2(109). С. 203–209.
5. Стеклов А.С., Подковырин Д.С. Нейро-нечеткая модель диагностирования технического состояния синхронного генератора // Главный энергетик. 2015. № 11–12. С. 55–60.
6. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MatLab М.: Телеком 2007.

СТЕКЛОВ АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ – аспирант кафедры электрооборудования, электропривода и автоматики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород (steklov84@mail.ru).

ТИТОВ ВЛАДИМИР ГЕОРГИЕВИЧ – доктор технических наук, профессор кафедры электрооборудования, электропривода и автоматики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород (eos@nntu.nnov.ru).

СЕРЕБРЯКОВ АРТЕМ ВЛАДИМИРОВИЧ – кандидат технических наук, доцент кафедры электрооборудования, электропривода и автоматики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород (serebryakov@ardman.ru).

A. STEKLOV, A. SEREBRYAKOV, V. TITOV DETERMINATION OF DEGREE OF USE OF SHIP SYNCHRONOUS GENERATORS WITH THE USE OF ARTIFICIAL NEURO-FUZZY NETS

Key words: artificial neural network, a synchronous generator, diagnosis, degree of efficiency.

The task of development of marine power units diagnostic systems is rather acute for ensuring safety of navigation. One of the ways of solving the problem is the usage of artificial neural networks. For the first time a comprehensive approach to the determination of the degree of efficiency of ship synchronous generators based on artificial neural networks is offered. The obtained results can be the basis for the creation of a new forecasting system of the technical condition of marine synchronous generator based on neural networks.

References

1. Dar'enkov A.B., Khvatov O.S. *Avtonomnaya vysokoeffektivnaya elektrogeneriruyushchaya stantsiya* [Highly autonomous electricity generating station]. *Trudy Nizhegorodskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im R.E.Alekseeva* [Proceedings of the Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev], 2009, vol. 77, pp. 68–72.
2. Kalyavin V.P., Rybakov L.M. *Nadezhnost' i diagnostika elementov elektroustanovok* [Reliability and diagnostics of electrical elements]. St. Petersburg, Elmor Publ., 2009, 336 p.
3. Kryukov O.V., Serebryakov A.V. *Metod i sistema prinyatiya reshenii po prognozirovaniyu tekhnicheskogo sostoyaniya elektroprivodnykh gazoperekachivayushchikh agregatov* [Method and system of decision-making forecasting technical condition of electrically driven gas pumping units] *Elektrotekhnicheskie sistemy i komplekсы* [Electrical systems and complexes], 2015, no. 4(29), pp. 35–38.
4. Serebryakov A.V., Titov V.G., Chernov E.A., Shakhov A.V. *Differentsirovanie nagruzki v sistemakh elektrosnabzheniya avtonomnykh potrebitel'ei* [Differentiation load in autonomous consumer power systems]. *Trudy Nizhegorodskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im R.E.Alekseeva* [Proceedings of the Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev], 2015, no. 2(109), pp. 203–209.
5. Steklov A.S., Podkovyrin D.S. *Neiro-nechetkaya model' diagnostirovaniya tekhnicheskogo sostoyaniya sinkhronnogo generatora* [Neuro-fuzzy model of diagnosing of a technical condition of the synchronous generator]. *Glavnyi energetik* [Chief Power Engineer], 2015, no. 11–12, pp. 55–60.
6. Shtovba S.D. *Proektirovanie nechetkikh sistem sredstvami MatLab* [Design of fuzzy systems MatLab Tools]. Moscow, Telekom Publ., 2007.

STEKLOV ALEKSEY – Post-Graduate Student of Electrical Equipment, Electric and Automation Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Russia, Nizhny Novgorod.

TITOV VLADIMIR – Doctor of Technical Sciences, Professor of Electrical Equipment, Electric and Automation Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Russia, Nizhny Novgorod.

SEREBRYAKOV ARTEM – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor of of Electrical Equipment, Electric and Automation Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Russia, Nizhny Novgorod.

Ссылка на статью: Стеклов А.С., Серебряков А.В., Титов В.Г. Определение степени работоспособности судовых синхронных генераторов с применением искусственных нейро-нечетких сетей // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 97–104.

УДК 621.316.13
ББК 65.9 (2) 304.14

М.И. ТОШХОДЖАЕВА

АНАЛИЗ ПОВРЕЖДЕНИЙ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧ 35-220 КВ НА ПРИМЕРЕ СОГДИЙСКОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

Ключевые слова: надежность, линии электропередач, электроснабжение, мероприятия.

В работе произведена оценка надежности линий различного класса напряжений, приведена характеристика воздушных линий электропередач (ВЛЭП) и динамика количества отключений по годам за 2009–2013 гг., представлено распределение параметра потока отказов. Выявлены причины отказов воздушных линий электропередач. Приведены рекомендации по повышению надежности линий.

Основной задачей электроэнергетики является снабжение потребителей электроэнергией высокого качества в необходимом количестве. Даже при самом качественном проектировании, строительстве и эксплуатации ВЛЭП возникает ряд случайных процессов, которые становятся причиной прекращения подачи электроэнергии потребителям либо снижения качества поставляемой электроэнергии. Под непредвиденными случайными процессами понимают не только технологические нарушения, но и нарушения, связанные с такими природными факторами, как сильный ветер, дождь, резкое колебание температуры окружающей среды и т.д.

Развитие электроэнергетики требует непрерывного анализа и разработки новых, более современных, методов оптимизации с тем, чтобы удовлетворить растущие потребности страны в электроэнергии с наименьшими эксплуатационными затратами.

Оценка и выбор средств оптимального обеспечения надежности электроэнергетической системы являются важными проблемами на современном уровне развития электроэнергетики, решению которых посвящены работы зарубежных [3] и отечественных учёных [2]. Однако вопросы оценки и выбора средств оптимального обеспечения надёжности ВЛЭП 35-220 кВ в специфических климатических условиях Республики Таджикистан, в частности Согдийской области, не нашли своего решения.

Надёжность электроэнергетической системы определяется надёжностью её отдельных элементов, таких как генерирующие агрегаты, линии электропередач, коммутационные аппараты, устройства защиты и автоматики и т.д. Надёжность любой системы характеризуют безотказностью, долговечностью, ремонтпригодностью и сохраняемостью её элементов.

Для оценки и управления уровнем надёжности в зарубежных странах применяют такие методы, как публичный контроль, государственные стандарты, стимулирующие схемы, контракты по надёжности и т.д. Основными показателями надёжности линий электропередач в США и Европейских странах являются [1, 4]:

- SAIDI (System Average Interruption Duration Index) – индекс средней длительности отключений по системе;
- SAIFI (System Average Interruption Frequency Index) – индекс средней частоты отключений по системе;

- CAIDI (Customer Average Interruption Duration Index) – индекс средней продолжительности отключений одного потребителя;
- MAIFI (Momentary Average Interruption Frequency Index) – индекс средней частоты кратковременных отключений;
- ENS (Electricity not supplied) – недоотпуск электроэнергии.

В отличие от зарубежных стран в государствах СНГ основными показателями надёжности являются SAIDI (System Average Interruption Duration Index) – индекс средней длительности отключений по системе, SAIFI (System Average Interruption Frequency Index) – индекс средней частоты отключений по системе и ENS (Electricity not supplied) – недоотпуск электроэнергии.

Как показывают исследования [1, 2], самыми ненадёжными элементами электроэнергетической системы являются воздушные линии электропередачи, так как на ВЛЭП кроме эксплуатационных факторов существенное влияние оказывают природные факторы.

Исходя из вышеприведённого автором произведён анализ повреждаемости ВЛЭП 35-220 кВ. По данным службы надёжности и техники безопасности (СН и ТБ) СогдЭС основные характеристики ВЛЭП приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Характеристики воздушных линий электропередач напряжением 35-220 кВ
Согдийской электрической сети**

Наименование ВЛЭП	По данным 01.01.2014		По данным 01.01.2015	
	протяженность двух цепных реверсивных ВЛЭП, км	протяженность двух цепных ВЛЭП, км	протяженность двух цепных реверсивных ВЛЭП, км	протяженность двух цепных ВЛЭП, км
ВЛЭП-220 кВ	438,13	349,1	438,13	349,1
Металлические опоры	280,45	210,32	280,45	210,32
Железобетонные опоры	157,6	138,73	157,6	138,73
ВЛЭП-110 кВ	839,21	557,99	848,66	575,58
Металлические опоры	410,45	253,39	421,09	259,27
Железобетонные опоры	428,76	304,6	427,57	315,81
ВЛЭП-35 кВ	605,29	524,14	652,195	568,29
Металлические опоры	320,91	287,51	305,26	305,26
Железобетонные опоры	320,91	287,51	260,122	212,4
Деревянные опоры	32,9	32,9	50,43	50,43
Итого	1882,62	1431,23	1938,985	1492,773

Как видно из табл. 1, в распределительных сетях 35-220 кВ в основном преобладают металлические конструкции опор. Это связано с тем, что в специфических условиях эксплуатации ВЛЭП Согдийской области и при наличии агрессивных сред (солевые бури) железобетонные опоры быстро теряют свои физико-механические свойства. Увеличение протяжённости ВЛЭП 35-110 кВ обусловлено тем, что в 2014 г. сданы в эксплуатацию новые ВЛЭП.

Для определения показателей надёжности ВЛЭП и исследования законов распределения отказов производился сбор статистических данных об аварийных отключениях линий напряжением 35-220 кВ за период 2009–2013 гг. На рис. 1 приведена среднегодовая динамика аварийных отключений линий напряжением 35-220 кВ по годам.

Как видно из рис. 1, для линий напряжением 35-220 кВ характерно наличие нескольких максимумов и параметр потока отказов линий электропере-

дач напряжением 35 кВ значительно выше. Это обусловлено тем, что элементы ВЛЭП-35 кВ эксплуатируются более 20-45 лет и они морально и физически устарели, требуется замена отдельных элементов линий. В общем случае параметр потока отказов ВЛЭП 35-220 кВ значительно выше нормативного значения. Это положение объясняется влиянием многочисленных факторов на надёжность работы ВЛЭП, особенно относительно низким уровнем технической эксплуатации.

Фактический параметр потока отказов можно определить по формуле [2]:

$$\omega_p = \frac{n_{отк}}{l} \cdot 100,$$

где $n_{отк}$ – количество фактических отказов за год; l – протяженность линии, км.

Для оценки показателей надёжности ВЛЭП отказы разделены на устойчивые и самовосстанавливающиеся. Сравнение параметров потока отказов воздушных линий СогдЭС с нормативными данными произведено согласно стандарту РД 34.20.574¹. При расчёте и сравнении параметра потока отказов учитываются только устойчивые отказы, неустойчивые отказы характеризуются с помощью коэффициента учёта устойчивых отказов.

Фактические значения коэффициентов учёта устойчивых отказов за отчётный период по сравнению их с нормативными данными, согласно [2], приведены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициент учёта устойчивых отказов за отчётный период

Номинальное напряжение U_n , кВ	$\omega_{норм}$ / $\omega_{факт}$	$\omega_{факт}/\omega_{норм}$ фактический									
		2009		2010		2011		2012		2013	
35	7,0	48/38	1,26	55/39	1,41	43/31	1,38	47/36	1,3	44/31	1,42
110-150	13,0	20/14	1,42	14/7	2	18/13	1,38	25/15	1,66	23/14	1,64
220-330	10,0	15/9	1,66	20/3	6,6	20/5	4	24/7	3,43	28/11	2,55

Сравнение количества отказов ВЛЭП 35-220 кВ Согдийской области Республики Таджикистан с нормативными данными приведено в табл. 3.

Как видно из табл. 3, количество отказов ВЛЭП намного выше нормативного значения. Это положение связано с тем, что элементы ВЛЭП эксплуатируются свыше 35-40 лет. Кроме того, на ВЛЭП влияют такие природные факторы, как дождь, снег, сильный ветер и т.д. Интенсивное изменение климата также влияет на надёжность ВЛЭП. На рис. 2 приведены распределение отказов по месяцам 2009–2013 гг. в зависимости от класса напряжения.

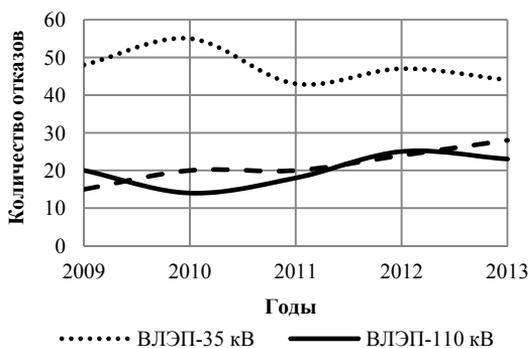


Рис. 1. Количество отказов воздушных линий электропередач напряжением 35-220 кВ Согдийской электрической сети

¹ РД 34.20.574 Показатели надёжности элементов энергосистем и работы энергоблоков с паротурбинными установками. URL: http://standartgost.ru/g/РД94_34.20.574.

Таблица 3

Сравнение количества отказов ВЛЭП СогдЭС с нормативными данными за отчётный период с 2009 г. по 2013 г.

$U_{\text{ном}}$, кВ	Материал опор	Число цепей	ω^* , отказ/год на 100 км норматив	L, длина линий, км	фр, отказ/год фактические				
					2009	2010	2011	2012	2013
35	Металлические	2	1,06	524,14	7,25	7,44	5,91	6,86	7,44
110	Железобетонные	2	1,01	557,99	2,5	1,25	3,22	2,69	2,51
220	Металлические	2	0,5	324,4	1,65	0,92	4,62	4,62	5,24

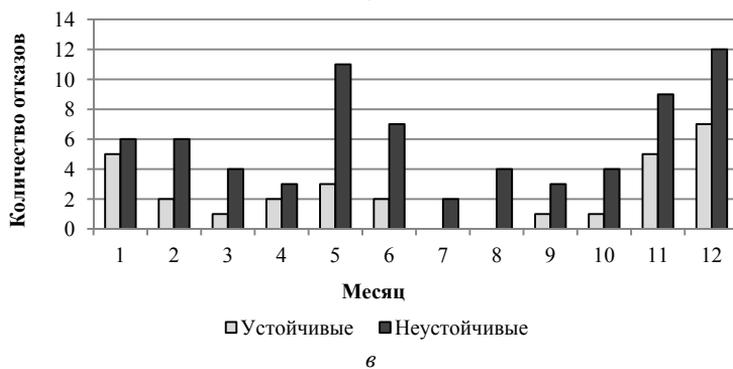
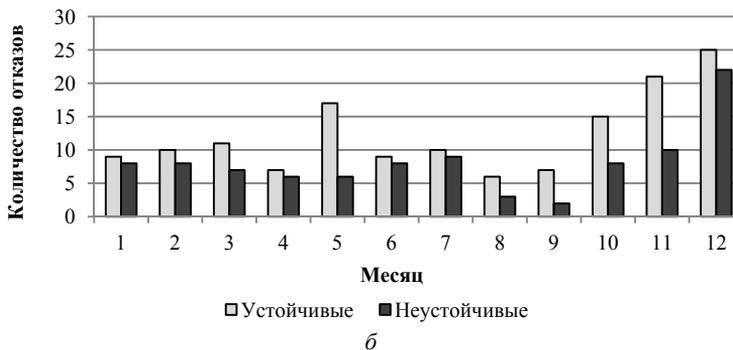
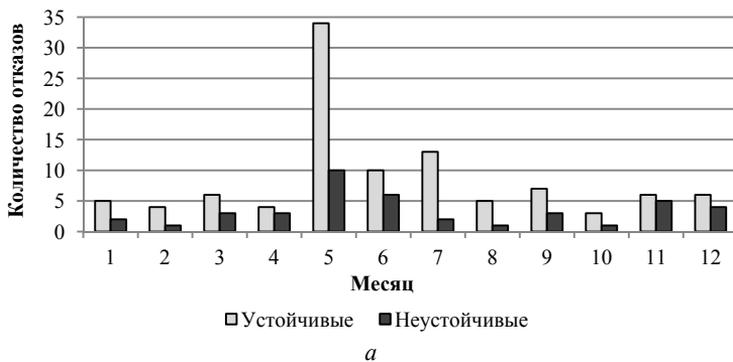


Рис. 2. Распределение количества отказов ВЛЭП 35-220 кВ

Согдийской электрической сети по месяцам:

а – линии электропередачи напряжением 110 кВ;

б – линии электропередачи напряжением 35 кВ;

в – линии электропередачи напряжением 220 кВ

Как видно из рис. 2, распределение отказов ВЛЭП имеет сезонный характер и в основном преобладают устойчивые отказы. Для линий электропередач напряжением 110 кВ максимум отказов приходится на май, а для линий 35 и 220 кВ имеют место два максимума, соответствующие летнему и зимнему периодам. Частично наличие двух максимумов обусловлено ограничением потребления электроэнергии в осенне-зимний период. Это положение усугубляют условия эксплуатации элементов, что приводит к снижению физико-механических свойств ВЛЭП, следовательно, к снижению надёжности их эксплуатации. Основные причины отказов и их соотношения представлены на диаграммах рис. 3.

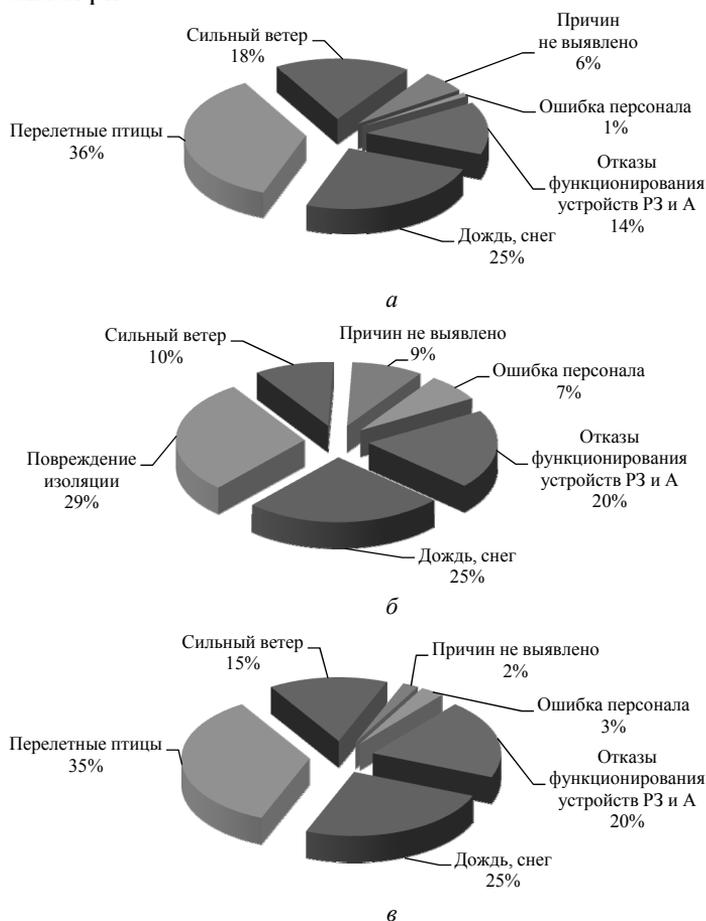


Рис. 3. Причины отказов ВЛЭП 35-220 кВ Согдийской электрической сети:
 а – линии электропередачи напряжением 110 кВ;
 б – линии электропередачи напряжением 35 кВ;
 в – линии электропередачи напряжением 220 кВ

Как видно из диаграмм рис. 3, основными причинами повреждения ВЛЭП 35-220 кВ являются природные условия, перелётные птицы, сильный ветер. Причем влияние отдельных факторов зависит от класса напряжения и конструкции ВЛЭП, а также от географического расположения сетей.

Для устранения влияния названных причин отказов ВЛЭП необходимо предпринять следующие меры:

– для уменьшения отказов функционирования устройств релейной защиты и автоматики, которые в основном обусловлены физическим старением коммутационных аппаратов и низким классом точности (более 60%) приборов систем измерения, телемеханики и системной автоматики, необходимо заменить устаревшие устройства защиты и автоматики на более современные и повысить квалификацию обслуживающего персонала;

– для учета влияния погодных условий, которые обусловлены аномальным изменением климата в связи со строительством различных искусственных водохранилищ, развитием промышленности и составляют почти треть причин отказов ВЛЭП, необходима разработка новых и замена старых конструкций опор и несущих конструкций ВЛЭП, соответствующих новым условиям эксплуатации;

– для устранения отказов от перекрытия ВЛЭП перелетными птицами необходимо на стадии проектирования разрабатываемых ВЛЭП предусматривались «птицезащитные» устройства и согласовать трассы прохождения ВЛЭП с зонами пролета птиц.

Таким образом, на основании анализа повреждаемости ВЛЭП 35-220 кВ Согдийских электрических сетей можно сделать следующие выводы:

1. Достаточно высокий уровень устойчивых отказов свидетельствует об относительно низком уровне технической эксплуатации ВЛЭП Согдийской электрической сети, снижении квалификации обслуживающего персонала и невыполнении предусмотренных нормативными документами плановых мероприятий и ремонтов в полном объеме.

2. Превышение потока самовосстанавливающихся отказов, наличие четко выраженных весенних и осенних максимумов указывают на влияние климатических и экологических факторов.

3. Немаловажное значение имеют загрязнения изоляторов пыльной смесью перелетными птицами. Необходимо применение новых типов изоляторов на основе изучения зарубежного опыта.

4. Относительно высокий уровень среднегодовой частоты плановых и внеплановых отключений ВЛЭП приводит к росту эксплуатационных затрат, следовательно, к снижению уровня надёжности электроснабжения Согдийских электрических сетей.

Для повышения надёжности ВЛЭП 35-220 кВ Согдийской энергосистемы необходимо внедрить следующие мероприятия:

1. Необходимо повысить уровень квалификации технического персонала по обслуживанию устройств РЗ и А путём организации и прохождения ими специальных курсов.

2. Существующее оборудование эксплуатируется более 50 лет с частичной заменой отдельных элементов, что указывает на необходимость коренной реконструкции сетей 35-220 кВ.

3. Требуется разработать концепцию развития с учетом климатических особенностей и алгоритм управления надёжностью региональных электрических сетей 35-220 кВ с целью повышения их надёжности.

Литература

1. Васильева М.В. Зарубежный опыт обеспечения надёжности электроснабжения // Вестник Волгоградского института бизнеса. 2013. № 4(25).
2. Гук Ю.Б. Анализ надёжности электроэнергетических установок. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1988. 244 с.
3. Chareonsrikasem S., Anantavanich K., Prungkhunmuang S., Suwanasri T. Enhancement of substation reability by retrofitting existing bus configuration applying hybrid switchgear: B3-206. CIGRE, 2012, 9 p.
4. Electric service reliability in Pennsylvania 2014. URL: http://www.puc.state.pa.us/consumer_info/electricity/reliability.aspx (Accessed 14 October 2015).

ТОШХОДЖАЕВА МУХАЙЁ ИСЛОМОВНА – аспирантка кафедры электроснабжение промышленных предприятий, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (shukrona14_01_2011@mail.ru).

**M. TOSHHODZHAEVA
DAMAGE ANALYSIS OF OVERHEAD POWER LINES
OF 35-220 KV EXAMPLE SOGD MAINS**

Key words: reliability, power lines, electricity, event.

The paper assessed the reliability of lines of different voltage classes, shows the characteristics of overhead power lines and the dynamics of the number of trips over the years for the years 2009–2013. Shows the distribution of failure flow parameter; The causes of failures of overhead power lines. The recommendations for improving the reliability of the lines.

References

1. Vasil'eva M.V. Zarubezhnyi opyt obespecheniya nadezhnosti elektrosnabzheniya [Foreign experience of ensuring reliability of power supply]. *Vesnik Volgogradskogo instituta biznesa* [Bulletin of the Volgograd institute of business], 2013, no. 4 (25).
2. Guk Yu.B. Analiz nadezhnosti elektroenergeticheskikh ustanovok [Analysis of reliability of electrical power installations]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1988, 244 p.
3. Chareonsrikasem S., Anantavanich K., Prungkhunmuang S., Suwanasri T. Enhancement of substation reability by retrofitting existing bus configuration applying hybrid switchgear: B3-206. CIGRE, 2012, 9 p.
4. Electric service reliability in Pennsylvania 2014. Available as: http://www.puc.state.pa.us/consumer_info/electricity/reliability.aspx (Accessed 14 October 2015).

TOSHHODZHAEVA MUHAYO – Post-Graduate Student of Industrial Power Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (shukrona14_01_2011@mail.ru).

Ссылка на статью: Тошходжаева М.И. Анализ повреждений воздушных линий электропередач 35-220 кВ на примере Согдийской электрической сети // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 105–111.

УДК 004.056
ББК 32.97

Е.В. БУРЬКОВА

ЗАДАЧА ОЦЕНКИ ЗАЩИЩЕННОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ

***Ключевые слова:** оценка защищенности, информационная система персональных данных, критерии оценки, классификационный и формальный подходы.*

Предложены результаты аналитического обзора современных подходов, методов и моделей оценки защищенности информационных систем. Рассмотрены основные этапы реализации процесса оценки защищенности, предложена структурная схема этапов оценки. Рассмотрены виды структурных моделей системы защиты информационных систем. Проанализированы современные программные комплексы оценки рисков информационной безопасности, выявлены их достоинства и недостатки.

Современные условия глобализации, увеличение количества электронных ресурсов, информационных баз, информационно-коммуникационных систем, в которых содержится конфиденциальная информация о гражданах, актуализируют задачу обеспечения защиты персональных данных. В соответствии с Федеральным законом № 152-ФЗ «О персональных данных» все организации обязаны обеспечить безопасность обрабатываемых персональных данных, причем реализовать меры защиты, соответствующие категории защищаемой информации и классу информационных систем персональных данных (ИСПДн). Важной задачей является корректная оценка уровня защищенности ИСПДн в условиях постоянно меняющегося состава угроз и вероятности их реализации. Необходимость такой оценки возникает при анализе защищенности информационных систем с целью выработки стратегических решений при построении оптимальной системы защиты. Своевременно выявленные уязвимости комплекса средств защиты ИСПДн помогут предотвратить риски нарушения конфиденциальности, целостности и доступности защищаемых персональных данных.

Оценка уровня защищенности информационной системы является одним из важных этапов разработки, а также модернизации комплексной защиты объекта информатизации. Задача оценки защищенности ИСПДн может быть рассмотрена как частный случай задачи оценки защищенности информационных систем. Отличие заключается лишь в том, что состав и содержание мероприятий по защите ИСПДн в Российской Федерации регламентируются законодательством, а также руководящими документами Федеральной службы по техническому и экспортному контролю РФ (ФСТЭК) и Федеральной службы безопасности (ФСБ)¹.

¹ О персональных данных: Фед. закон от 27 июля 2006 г. № 152-ФЗ. Доступ из справ.-прав. системы «КонсультантПлюс»; Базовая модель угроз безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных: руководящий документ (утв. ФСТЭК России 15.02.2008 г.). Доступ из справ.-прав. системы «КонсультантПлюс».

При осуществлении оценки уровня защищенности ИСПДн возникают проблемы, связанные со следующими факторами:

- многообразие существующих нормативно-правовых документов, регламентирующих порядок обработки данных, состав и содержание организационно-технических мероприятий по защите информационных ресурсов для информации различного уровня конфиденциальности;
- отсутствие в нормативно-правовых документах количественных критериев оценки защищенности информационных систем персональных данных;
- сложность, многокомпонентность структуры оцениваемой информационной системы персональных данных;
- условия неопределенности и недостаточные знания об угрозах и вероятности их реализации для заданной информационной системы;
- постоянно меняющаяся статистика инцидентов информационной безопасности, в том числе киберугроз, возникающих в результате подключения к сети Интернет.

Реализация оценки защищенности информационной системы персональных данных представляет собой совокупность этапов, показанных на рисунке.

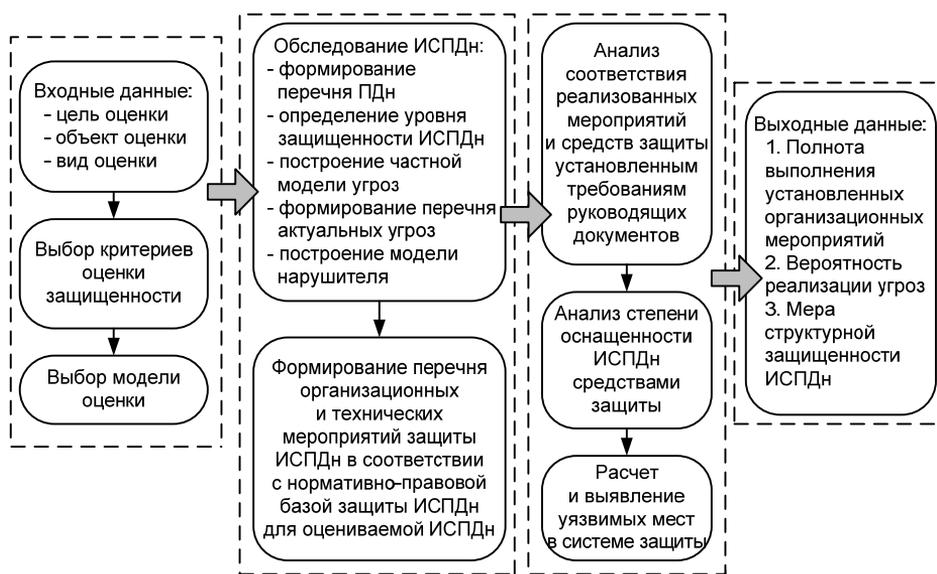


Схема этапов оценки защищенности ИСПДн

Цель оценки может быть различной и определяется заказчиком оценки защищенности, это может быть нахождение соответствия уровня защищенности ИСПДн установленным критериям в регламентирующих документах, необходимость совершенствования системы защиты и т.д.

На начальном этапе процесса оценки определяют вид оценки: независимая или самооценка. Независимая оценка должна быть проведена специальной группой, члены которой независимы от объекта оценки (лицензиаты). Заказчик оценки принимает участие в экспертной части процесса оценки,

обеспечивает взаимодействие. Это позволяет учесть специфику оцениваемой информационной системы, обеспечить достоверность результатов оценки. Самооценка выполняется организацией самостоятельно с целью снижения рисков безопасности либо при модернизации системы защиты ИСПДн.

Критерии оценки позволяют установить конкретные значения, характеризующие защищенность информационной системы. В качестве критериев оценки защищенности могут использоваться требования руководящих документов к безопасности информационных систем. Существуют как международные, так и отечественные стандарты, содержащие требования к безопасности информационных ресурсов. Международный стандарт ISO 15408 «Общие критерии оценки безопасности информационных технологий» содержит критерии оценки средств защиты программно-технического уровня. Общие критерии определяют функциональные требования безопасности и требования к адекватности реализации функций безопасности. Международный стандарт ИСО/МЭК 27001, который был подготовлен для того, чтобы предоставить модель для создания, внедрения, эксплуатации, постоянного контроля, анализа, поддержания в рабочем состоянии и улучшения Системы менеджмента защиты информации [2].

В России используется руководящий документ Гостехкомиссии России «Автоматизированные системы. Защита от НСД к информации. Классификация АС и требования по защите информации», ГОСТ Р ИСО/МЭК 15408-1-2002 «Информационная технология. Методы и средства обеспечения безопасности. Критерии оценки безопасности информационных технологий», а также национальный стандарт РФ ГОСТ Р О 0043-003-2012 «Защита информации. Аттестация объектов информатизации. Общие положения».

Для реализации оценки защищенности информационных систем используются следующие методы: метод экспертных оценок, метод категорирования, формальный метод, риск-ориентированный метод [1], оценка по экономическим показателям, лингвистический подход на основе теории нечетких множеств [4] и др.

Среди множества подходов существуют два основных подхода к оценке защищенности информационных систем: первый – классификационный [6], основанный на анализе соответствия классов сертифицированных средств защиты, применяемых на объекте, требованиям руководящих документов к данному классу информационной системы. Такой подход подразумевает проведение исследования исходной защищенности ИСПДн и проводится в процессе аттестации объекта информационной безопасности. Данный подход не дает количественного результата оценки защищенности, а только заключение о соответствии или несоответствии.

Второй подход – формальный [7], основанный на построении математических (формализованных) моделей объекта защиты и исследовании защищенности в соответствии с выбранными критериями и показателями для построенных моделей. Используемые критерии являются качественными, но не количественными. Для получения количественной оценки защищенности информационных систем используются вероятностные методы. Затруднительность статистического анализа данных при оценке защищенности вызвана необходимостью анализа большого количества признаков качественной природы, таких

как частота реализации угроз, отсутствие прогноза времени действия угроз, модель нарушителя, модель объекта, величина возможного ущерба и т.п.

Назначение математической модели заключается в создании представления объекта в виде совокупности взаимосвязанных функциональных модулей, для которых проводятся анализ уязвимостей, оценка состояния средств защиты, расчет вероятности реализации угроз безопасности для каждого модуля и для системы в целом [3].

Для проведения оценки защищенности информационных систем наибольшее распространение получили следующие общие модели:

- общая математическая модель системы защиты информационных систем отражает процесс защиты как процесс взаимодействия источников угроз и средств защиты, препятствующих действию этих угроз;

- обобщенная модель системы защиты информационной системы отображает основные процессы, осуществляемые в ней с целью оптимизации защиты и рассматриваемые как процессы распределения и использования ресурсов ее защиты;

- модель общей оценки угроз связана с оценкой возможного ущерба от реализации угроз безопасности, для нее характерен критерий экономической эффективности средств защиты;

- модель анализа разграничения доступа к информационным ресурсам характерна для решения задач анализа и синтеза механизмов разграничения доступа к различным видам информационных ресурсов информационной системы.

В рамках формального подхода наибольшее распространение получила структурная модель системы защиты информационных систем [7]. Данная модель основана на декомпозиции информационной системы на такие уровни, как уровень операционной системы, уровень системы управления базой данных, сетевой уровень, уровень прикладного программного обеспечения и т.д. При оценке защищенности информационной системы анализируется защищенность каждого уровня, анализируется стойкость средств защиты по отношению к актуальным угрозам безопасности, строятся вектор защищенности и матрица распределения вероятностей по обозначенным уровням информационной системы.

В исследованиях рассматривается построение системы структурных моделей основных компонентов системы защиты информационных технологий:

- структурная модель угрозы, в которой квалификация угрозы учитывает оценку активации угрозы, оценку успеха, оценку возможного ущерба; при этом сама угроза учитывает спецификацию актива, спецификацию агента (нарушителя) и спецификацию нападения;

- структурная модель контекста безопасности учитывает активы, уязвимости, риски, контрмеры;

- интегральная структурная модель контекста угрозы, которая включает характеристики таких составляющих модели безопасности, как модель угроз, модель нарушителя, активы, ущерб.

Данные модели учитывают контексты угроз, мотивацию и возможности нарушителей, условия реализации угроз, применяемые средства защиты и т.д. Результатом моделирования являются оценка возможности активизации угрозы (превращение угрозы в атаку), оценка успеха атаки, оценка ущерба. Одной из

ключевых задач является формирование набора функций безопасности объекта оценки, который определяет степень защищенности по каждому из показателей.

Сложность и большой объем работ по оценке защищенности информационных систем, выполняемых в настоящее время как за рубежом, так и в России, с неизбежностью приводят к необходимости применения программных комплексов поддержки деятельности по подготовке и проведению оценок. Для реализации математического моделирования системы защиты информационных систем с целью оценки их защищенности разработаны специализированные программные продукты, как зарубежные, так и отечественные. Рассмотрев некоторые из этих программных комплексов, можно сделать вывод о большом многообразии показателей оценки защищенности. Это означает, что есть возможность для каждой информационной системы подобрать программу, отвечающую требованиям к целям и результатам оценки.

Среди отечественных разработок известны программные комплексы АванГард, Кондор+, ГРИФ, РискМенеджер (Институт системного анализа РАН) (Россия) [5], среди зарубежных – Proteus, vsRisk, CRAMM, COBRA (Великобритания), MethodWare (Австралия), Callio Secura 17799 (Канада), Risk Watch (США). Сравнительный анализ некоторых из перечисленных программных комплексов оценки приведен в таблице.

Сравнительный анализ программных комплексов оценки

Параметр сравнения	АванГард	РискМенеджер	Proteus	vsRisk	MethodWare
Поддерживаемые стандарты	ГОСТ Р ИСО/МЭК 15408-2002 ИСО/МЭК 27001, ISO/IES 17799	ГОСТ Р ИСО/МЭК 15408-2002 ИСО/МЭК 27001, ISO/IES 17799	ИСО/МЭК 27001	ИСО/МЭК 27001, BS ISO/IES 17799	AS/NZS 4360:1999 ISO 17799
Построение модели угроз	+	+	+	-	+
Построение структурной модели объекта	+	+	+	-	-
Анализ, оценка и управление рисками	+	+	+	+	+
Регулярно обновляемая база данных угроз и уязвимостей	+	+	+	+	+
Построение модели защиты	+	+	-	-	+
Расчет ущерба	-	+	-	+	+
Выбор наиболее эффективных комплексов защиты	+	+	+	+	+
Контроль соответствия требованиям стандарта	+	+	+	+	+
Набор шаблонов опросников	+	+	+	+	+
Расчет рископонижающих мер защиты	+	+	+	+	-
Средства создания отчетов	+	+	+	+	+
Разработка плана восстановления и действий в чрезвычайных ситуациях	-	-	-	-	+

Данные программные комплексы являются мощными автоматизированными средствами оценки и управления рисками информационной безопасности, обладают многофункциональными возможностями построения моделей защиты, выбора эффективных комплексных мер защиты, сочетают количественные и качественные методы оценки безопасности информационных систем и значительно сокращают результирующее время анализа рисков.

Однако в основе каждого из этих программных продуктов лежит своя методика оценки, все они являются достаточно сложными, имеют высокую функциональность, требуют адаптации к конкретной оцениваемой информационной системе, имеют высокую стоимость, каждый из них имеет достоинства и недостатки. Задача разработки новых методик и новых автоматизированных программных комплексов оценки защищенности информационных систем остается актуальной и привлекательной для разработчиков, с одной стороны, и для заказчиков – с другой.

Литература

1. Астахов А.М. Искусство управления информационными рисками. М.: ДМК Пресс, 2010. 312 с.
2. Искусство управления информационной безопасностью [Электронный ресурс]. URL: <http://www.iso27000.ru/informacionnye-rubriki/upravlenie-riskami/programmnye-produkty-dlya-analiza-riskov>.
3. Курило А.П., Финько В.Н., Зарубин В.С., Фомин А.Я. Моделирование как системообразующий фактор при оценке защищенности информационных процессов в компьютерных системах // Безопасность информационных технологий. 2010. № 2. С. 19–21.
4. Нестеров С.А. Анализ и управление рисками в информационных системах на базе операционных систем Microsoft. СПб.: Санкт-Петербургский политехн. ун-т, 2009. 136 с.
5. Программный комплекс Риск менеджер [Электронный ресурс]. URL: <http://www.srisks.ru>.
6. Ступина А.А., Золотарев А.В. Сравнительный анализ методов решения задачи оценки защищенности автоматизированных систем // Вестник Сибирского аэрокосмического университета. 2012. № 4. С. 56–60.
7. Суханов А.В. Формальные модели защищенности информационных технологий на основе общих критериев: автор. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2006. 24 с.

БУРЬКОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА – кандидат педагогических наук, доцент кафедры вычислительной техники и защиты информации, Оренбургский государственный университет, Россия, Оренбург (evb99@yandex.ru).

E. BURKOVA

THE TASK OF ASSESSING THE SECURITY OF INFORMATION SYSTEMS OF PERSONAL DATA

Key words: security assessment, information system staff, data evaluation criteria, classification and formal approaches.

In the article the results of an analytical review of modern approaches, methods and models of assessing the security of information systems. Describes the main stages of the implementation process of security evaluation of the proposed block diagram of the evaluation stages. Describes the types of structural models of the system of protection of information systems. Analyzes the modern program complexes of information security risk assessment, identified their advantages and disadvantages.

References

1. Astakhov A.M. *Iskusstvo upravleniya informatsionnymi riskami* [The art of information risk management]. Moscow, DMK Press, 2010, 312 p.
2. *Iskusstvo upravleniya informatsionnoi bezopasnost'yu* [The art of information security management]. Available at: <http://www.iso27000.ru/informacionnye-rubriki/upravlenie-riskami/programmnye-produkty-dlya-ana-liza-riskov>.
3. Kurilo A.P., Fin'ko V.N., Zarubin V.S., Fomin A.Ya. *Modelirovanie kak sistemoobrazuyushchii faktor pri otsenke zashchishchennosti informatsionnykh protsessov v komp'yuternykh sistemakh* [Modeling as a backbone factor in assessing the security of information processes in computer systems. Security of information technologies]. *Bezopasnost' informatsionnykh tekhnologii* [Security of information technologies], 2010, no. 2, pp. 19–21.
4. Nesterov S.A. *Analiz i upravlenie riskami v informatsionnykh sistemakh na baze operatsionnykh sistem Microsoft* [Analysis and management of risks in information systems based on Microsoft operating systems]. St. Petersburg, 2009, 136 p.
5. *Programmnyi kompleks Risk menedzher* [Software complex Risk Manager]. URL: <http://www.srisks.ru>.
6. Stupina A.A., Zolotarev A.V. *Sravnitel'nyi analiz metodov resheniya zadachi otsenki zashchishchennosti avtomatizirovannykh sistem* [Comparative analysis of methods of solving the task of assessing the security of automated systems]. *Vestnik Sibirskogo state aerokosmic university* [Bulletin of Siberian state aerospace University], 2012, no. 4, pp. 56–60.
7. Sukhanov A.V. *Formal'nye modeli zashchishchennosti informatsionnykh tekhnologii na osnove obshchikh kriteriev: avtor. dis. kand. tekhn. nauk* [Formal models of security of information technologies on the basis of common criteria.. Abstract of PhD thesis]. St. Petersburg, 2006, 24 p.

BURKOVA ELENA – Candidate of Pedagogical Sciences, Assistant Professor of Department of Computer Science and Information Security, Orenburg State University, Russia, Orenburg.

Ссылка на статью: Бурькова Е.В. Задача оценки защищенности информационных систем персональных данных // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 112–118.

УДК 004.421.2:517.443
ББК 3811.3:В161.911

Н.А. ГАЛАНИНА, В.А. ПЕСОШИН, Н.Н. ИВАНОВА,
Б.М. КАЛМЫКОВ, Д.Д. ДМИТРИЕВ

**АППАРАТУРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ
АЛГОРИТМА БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ
В СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ В ОСТАТОЧНЫХ КЛАССАХ**

Ключевые слова: быстродействие, быстрое преобразование Фурье (БПФ), система остаточных классов (СОК), модуль СОК, вычет, канал СОК, весовой коэффициент, операция «бабочка».

Сокращение времени обработки данных в настоящее время продолжает оставаться актуальной задачей при построении устройств спектрального анализа. Для повышения быстродействия цифровых устройств спектрального анализа в статье предложено использование теории СОК. Разработаны схемы устройства БПФ в СОК и его функциональных блоков. Полученные устройства БПФ в СОК обладают более высоким быстродействием по сравнению с аналогами, построенными на основе классических способов.

Сокращение времени выполнения быстрого преобразования Фурье (БПФ) является актуальной задачей при построении высокопроизводительных систем спектрального анализа цифровых сигналов. В настоящее время известно много реализаций алгоритма БПФ, в том числе на заказных СБИС, сигнальных процессорах, ПЛИС. Однако разработчикам не всегда удается достичь значительного повышения их быстродействия для заданной точности обработки сигналов и требуемой отказоустойчивости при условии снижения аппаратных затрат и стоимости. Дальнейшее увеличение производительности устройств обработки данных возможно либо за счет повышения степени интеграции микросхем, совершенствования технологии изготовления кристалла, новых архитектурных решений процессоров, либо с помощью применения эффективных алгоритмических методов повышения быстродействия [2, 8–10, 13, 14].

Одним из способов проектирования цифровых устройств с повышенным быстродействием является использование непозиционных систем счисления, в частности системы счисления в остаточных классах (СОК) [1, 3, 11, 12, 15–17]. Известно, что обработка цифровых сигналов в СОК состоит из следующих этапов: 1) кодирования входного сигнала вычетами СОК; 2) обработки полученных сигналов в соответствии с заданным алгоритмом в кольце вычетов; 3) декодирования, т.е. перевода результата обработки в позиционный код [3, 7]. Увеличение быстродействия при обработке сигналов в СОК достигается за счет перехода к параллельной обработке данных, имеющих существенно меньшую разрядность по сравнению с разрядностью исходных данных. При этом благодаря свойствам СОК можно построить системы обработки сигналов с повышенной точностью [6].

Теоретические вопросы синтеза устройств быстрого преобразования Фурье (БПФ) в СОК, к которым относятся выбор системы модулей СОК, синтез функциональных блоков БПФ в СОК, были подробно изложены в [3, 4].

Целью данного исследования является решение задачи проектирования непозиционных устройств спектрального анализа – аппаратурной реализации алгоритмов БПФ в СОК с заданными свойствами.

Структурная схема устройства для вычисления N_5 -точечного БПФ в СОК показана на рис. 1 [3].

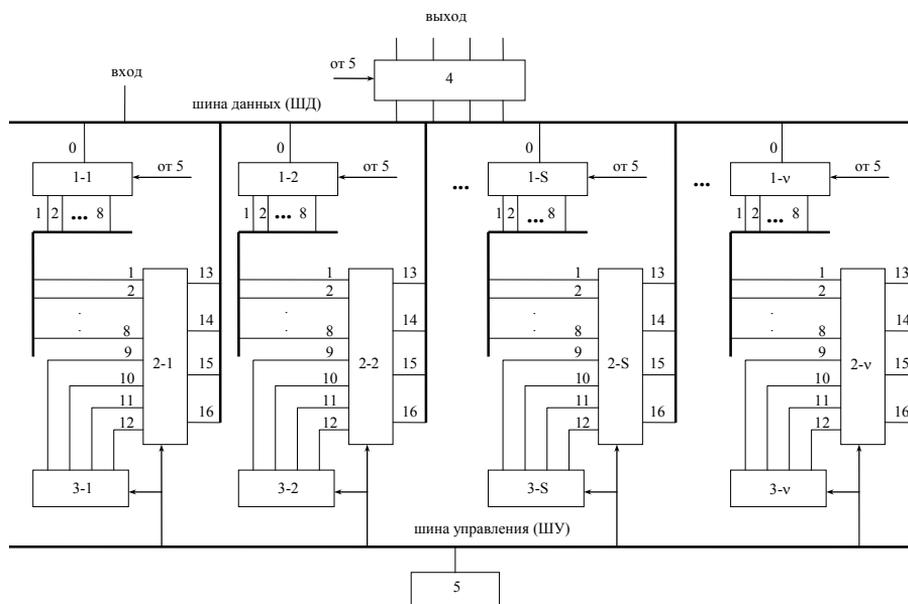


Рис. 1. Структурная схема устройства БПФ в СОК:

- 1-1, ..., 1- v – блоки определения вычетов;
- 2-1, ..., 2- v – вычислительные блоки;
- 3-1, ..., 3- v – блоки памяти для записи весовых коэффициентов;
- 5 – синхронизатор;
- 4 – блок восстановления результата

На рис. 2–4 показаны функциональные схемы блоков, которые разработаны в соответствии со структурной схемой БПФ в СОК (рис. 1): блок определения вычетов (1- S); вычислительный блок (2- S); схема операционного узла, входящая в состав блока 2- S ; блок восстановления результата (4- S).

Блоки определения вычетов (рис. 2) состоят из ПЗУ (узел 6), распределителя импульсов и восьми элементов «И» (узлы 8-1 – 8-8).

В состав вычислительных блоков (рис. 2) входят десять элементов «ИЛИ» (узлы 9-1 – 9-8, 14-1 и 14-2), восемь ОЗУ (узлы 10-1 – 10-8), четыре элемента «И» (узлы 12-1, 12-2, 13-1, 13-2), два регистра (RG 15-1 и 15-2), два операционных узла (ОУ 16-1 и 16-2).

Схемы операционных узлов (рис. 3), входящие в состав вычислительных блоков (рис. 2), состоят из восьми ПЗУ (узлы 17-1 – 17-8), четырех регистров (RG 18-1 – 18-4), двенадцати элементов «И» (узлы 19-1, 19-2, 20-1, 20-2, 22-1, 22-2, 23-1, 23-2, 25-1, 25-2) и четырех элементов «ИЛИ» (узлы 21-1, 21-2, 24-1, 24-2).

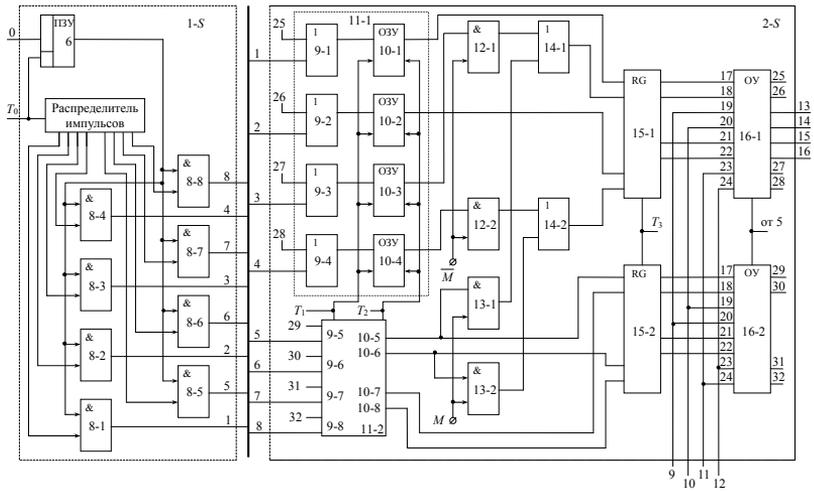


Рис. 2. Схемы блока определения вычетов (1-S) и вычислительного блока (2-S)

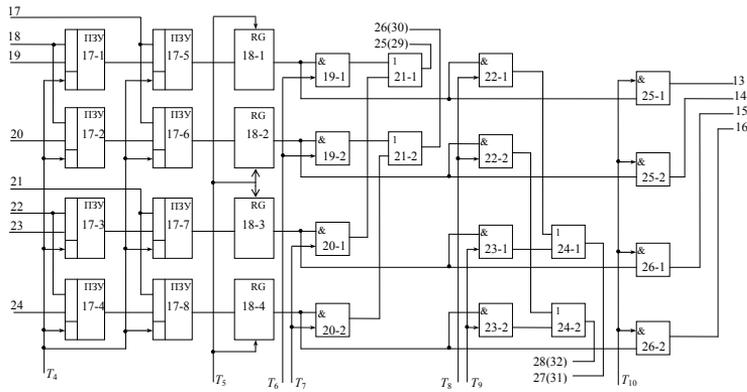


Рис. 3. Схема операционного узла

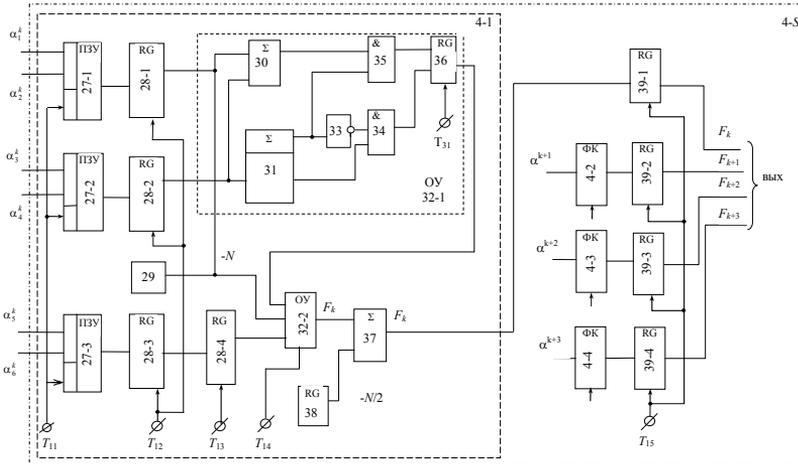


Рис. 4. Схема блока восстановления результата (4-S)

Схема блока восстановления результата (рис. 4) состоит из четырех блоков формирователя кода (ФК 4-1 – 4-4) и четырех регистров (RG 39-1 – 39-4). Каждый блок формирователя кода (ФК 4-1 – 4-4) состоит из трех ПЗУ (узлы 27-1 – 27-3), четырех регистров (RG 28-1 – 28-4), двух константных регистров (узлы 29 и 38), двух операционных узлов (ОУ 32-1 – 32-2), сумматора (узел 37). Операционные узлы ОУ 32-1 и 32-2 блоков формирователя кода (ФК 4-1 – 4-4) (рис. 4) включают по два сумматора (узлы 30 и 31), одному элементу «НЕ» (узел 33), по два элемента «И» (узлы 34 и 35) и одному регистру (RG 36).

Устройство БПФ в СОК работает следующим образом. Через шину данных отчеты входного сигнала $x[nT]$ ($n = \overline{1, N_S}$) поступают в блоки определения вычетов $1-S$ ($S = \overline{1, v}$). Эти блоки могут быть построены на логических схемах или микросхемах памяти, в которых каждое число на входе является адресом вычета [3]. В результате формируются v параллельных каналов обработки сигналов в кольце вычетов по выбранным основаниям СОК (N_S) и происходит кодирование сигнала вычетами: по поступающему на вход микросхемы отчету сигнала $x[nT]$ на выходах этих блоков формируются соответствующие вычеты $x_S[nT]$.

Далее данные группируются по $N_S/8$ чисел. При этом общепринятой двоичной инверсии не требуется. Затем данные разбиваются на две группы в соответствии с четностью и нечетностью номеров чисел: $x(0), x(2), x(4), x(6), x(8), x(10), x(12), \dots, x(1), x(3), x(5), x(7), x(9), x(11), \dots$, а каждая из этих групп делится еще на четыре подгруппы. Таким образом формируются следующие группы:

1) для четных номеров:

первая	$x(0),$	$x(8),$	$x(16)...$
вторая	$x(2),$	$x(10),$	$x(18)...$
третья	$x(4),$	$x(12),$	$x(20)...$
четвертая	$x(6),$	$x(14),$	$x(22)...$

2) для нечетных номеров:

первая	$x(1),$	$x(9),$	$x(17)...$
вторая	$x(3),$	$x(11),$	$x(19)...$
третья	$x(5),$	$x(13),$	$x(21)...$
четвертая	$x(7),$	$x(15),$	$x(23)...$

Первая группа чисел с четными номерами записывается в узлы памяти ОЗУ 10-1, вторая – в ОЗУ 10-2, третья – в ОЗУ 10-3, четвертая – в ОЗУ 10-4; первая группа с нечетными номерами – в ОЗУ 10-5, вторая – в ОЗУ 10-6, третья – в ОЗУ 10-7, четвертая подгруппа чисел с нечетными номерами – в ОЗУ 10-8 (рис. 2). Из-за особенностей реализации алгоритма БПФ эти микросхемы памяти имеют различный объем: ОЗУ 10-1, 10-2 и 10-5, 10-6 содержат по $N_S/4$ слов, остальные – по $N_S/8$ слов.

Процесс преобразования начинается после записи массива чисел $x_S[kT]$ в узлы памяти каждого канала. На первых $(L-1)$ -х шагах ($L = \log_2 N_S$) вычислительный блок отключен от блока восстановления результата, так как в это время в операционном узле сигнал T_{10} не формируется (на один из входов элементов «И» 25 и 26 поступает нулевое значение, они «не открываются»). При подаче от блока управления сигналов T_6, \dots, T_9 «открываются» элементы «И» 19, 20, 22, 23 и сигналы с выходов операционных узлов ОУ 16-1 и 16-2 поступают на соответствующие узлы памяти ОЗУ 10-1 – 10-8. Одновременная работа двух операци-

онных узлов ОУ 16-1 и 16-2 обеспечивается при значении сигнала $\overline{M} = 1$ ($M = 0$), который «открывает» элементы «И» 12-1, 12-2 и «отключает» 13-1, 13-2. При этом узел памяти 11-1 подключен к ОУ 16-1, а узел 11-2 – к ОУ 16-2.

Для реализации операции «бабочка» с прореживанием по времени ($C = A + BW^k$) и ($D = A - BW^k$) в каналах СОК в блоках 3-S программно формируются вычеты весовых коэффициентов $\langle W^k \rangle$ и $\langle V^k \rangle$ для k -й и $(k+1)$ -й, а также для $(k + N/2)$ -й и $(k + N/2 + 1)$ -й операций по модулю N_S . При этом $W_S^{k+N/2} = V_S^k$, а $V_S^{k+N/2} = W_S^k$, что учтено соответствующим подключением к элементам «ИЛИ» 14-1 и 14-2 входов, по которым подаются весовые коэффициенты $\langle W^k \rangle$, $\langle V^k \rangle$, $\langle W^{k+1} \rangle$, $\langle V^{k+1} \rangle$ (рис. 2).

В схемах операционного узла (рис. 3) в ПЗУ 17-1 – 17-4 хранятся вычеты операций умножения, а в ПЗУ 17-5 – 17-8 – вычеты операций сложения сигналов. Объем памяти каждого из этих ПЗУ равен 2^{2R_S} слов разрядности R_S . В ПЗУ 17-1 по адресу, соответствующему двоичному $2R_S$ -разрядному коду, который составлен из слов $\langle B \rangle$ и $\langle W^k \rangle$, хранится результат $\langle BW^k \rangle$ (аналогично для ПЗУ 17-3), а в ПЗУ 17-2 по адресу, составленному стыковкой слов $\langle B \rangle$ и $\langle V^k \rangle$, хранится результат $\langle BV^k \rangle$ (аналогично для ПЗУ 17-4). В ПЗУ 17-5 и 17-7 по $2R_S$ -разрядным адресам [$\langle A \rangle$, $\langle BW^k \rangle$] хранятся вычеты $\langle C \rangle = \langle \langle A \rangle + \langle BW^k \rangle \rangle$, а в ПЗУ 17-6 и 17-8 – вычеты $\langle D \rangle = \langle \langle A \rangle + \langle BV^k \rangle \rangle$.

На последнем шаге преобразования (при $\overline{M} = 0$, $M = 1$) элементы «И» 12-1, 12-2, 13-1, 13-2 «отключены». Блоки ОЗУ 10-1, 10-2, 10-5, 10-6 подключены к операционному узлу ОУ 16-1, сигнал с выхода которого (его регистр 18) через элементы «И» 25, 26 (которые открываются при $T_{10} = 1$) идет на вход блока восстановления результата 4 (рис. 4).

В блоке восстановления результата хранятся априорные суммы: в ПЗУ 27-1 – $\langle S_1 \rangle = \langle \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \rangle_N$, в ПЗУ 27-2 – $\langle S_2 \rangle = \langle \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4 \rangle_N$, в ПЗУ 27-3 – $\langle S_3 \rangle = \langle \alpha_5 \beta_5 + \alpha_6 \beta_6 \rangle_N$. Регистры блока 4 обеспечивают конвейерный режим работы на L -м шаге. Вычеты $\langle S_i \rangle$ из ПЗУ 27-1 и 27-2 подаются на вход логической схемы, состоящей из сумматоров 30 и 31 и двух элементов «И» 34, 35. Значение сигнала, равное $-N$, хранится в регистре 29. Если $S_1 + S_2 < N$, то в знаковом разряде сумматора 31 формируется единица, открывается элемент «И» 35 и сумма $\langle S_1 + S_2 \rangle_N$ записывается в регистр RG 36. Если же $S_1 + S_2$ выходят за пределы N , то в знаковом разряде сумматора 31 формируется нуль, «открывается» элемент «И» 35 и число $\langle S_1 + S_2 - N \rangle_N = \langle S_1 + S_2 \rangle_N$ записывается в регистр RG 36. Аналогично работает операционный узел ОУ 32-2. Специфическое представление нуля через $N/2$ требует проведения операции нормализации чисел при восстановлении результата обработки данных. Из числа F_k , которое формируется операционным узлом ОУ 32-2, в сумматоре 37 вычитается $N/2$ ($-N/2$ хранится в регистре 38). Здесь же результат нормируется путем сдвига запятой на R_2 разрядов влево. Четыре одинаковых блока формирователя кода (ФК 4-1 – 4-4) используются для одновременной обработки четырех чисел $\bar{\alpha}_S^k$, $\bar{\alpha}_S^{k+1}$, $\bar{\alpha}_S^{k+2}$, $\bar{\alpha}_S^{k+3}$ с выхода каждого канала. Результаты преобразований F_k , F_{k+1} , F_{k+2} , F_{k+3} считываются с выхода устройства БПФ в СОК из регистров 39-1 – 39-4.

Результаты компьютерного моделирования подтвердили теоретические предположения об увеличенном быстродействии устройств вычисления БПФ в

СОК по сравнению с таковыми, построенными на основе позиционных систем счисления [5, 6]. Такие результаты достигнуты за счет сокращения количества процессорных циклов на вычисление БПФ.

Выводы. В статье предложен аппаратный метод синтеза устройств ЦОС в СОК. Синтезированы функциональные модули вычислительной техники для практической реализации базовых операций БПФ в СОК. Разработанное устройство БПФ в СОК отличается более высоким быстродействием по сравнению с классическими схемами, что подтверждено проведенным компьютерным моделированием.

Литература

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. М.: Сов. радио, 1968. 440 с.
2. Альтман Е.А. Оптимизация вычислительной схемы быстрого преобразования Фурье // Омский научный вестник. 2008. № 1(64). С. 149–151.
3. Галанина Н.А. Методы и вычислительные устройства цифровой обработки сигналов в системе остаточных классов: дис. ... д-ра техн. наук. Казань, 2010. 268 с.
4. Галанина Н.А. Синтез функциональных модулей БПФ в СОК // Вестник Чувашского университета. 2005. № 2. С. 124–127.
5. Галанина Н.А., Дмитриев Д.Д. Разработка конфигурационного файла для реализации дискретного преобразования Фурье в системе остаточных классов на ПЛИС // Вестник Чувашского университета. 2011. № 2. С. 119–125.
6. Галанина Н.А., Ефимов А.Д. Моделирование оптимальных алгоритмов быстрого преобразования Фурье и их сравнительный анализ // Вестник Чувашского университета. 2009. № 2. С. 200–209.
7. Галанина Н.А., Песошин В.А., Иванова Н.Н. Разработка устройств цифровой фильтрации и спектрального анализа с индексированием данных в системе остаточных классов // Вестник Чувашского университета. 2014. № 2. С. 93–97.
8. Гуцин А.В., Литвинов В.Л. Современные методы и средства реализации алгоритмов быстрого преобразования Фурье в информационных системах // Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании: сб. материалов II Междунар. науч.-техн. и науч.-метод. конф. СПб., 2013. С. 564–567.
9. Капитанов В., Мистюков В., Володин П. Однокристалльная реализация алгоритма БПФ на ПЛИС фирмы XILINX // Компоненты и технологии. 2000. № 5. С. 52–55.
10. Маркович И.И. Совмещенные алгоритмы вычисления ДПФ действительных сигналов // Искусственный интеллект. Интеллектуальные системы (ИИ-2012): сб. материалов Междунар. науч.-техн. конф. Краснодар: Наука, 2012. С. 111–114.
11. Blahut R. Fast Algorithms for Digital Signal Processing. Cambridge University Press, 2010, 469 p.
12. Cardarilli G.C., Nannarelli A., Re M. Residue Number System for Low-Power DSP Applications. Proc. of 41st Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, 2007. Available at: <http://www.imm.dtu.dk/~alna/pubs/asil07b.pdf>.
13. Chaves R., Sousa L. RDSP: a RISC DSP based on residue number system. Proc. of the Euro-micro Symposium on Digital System Design (DSD'03). Inesc-ID, Lisboa, Lisbon, Portugal, 2003. DOI: 10.1109/DSD.2003.1231911.
14. Leclère J., Botteron C., Farine P.-A. Implementing super-efficient FFTs in Altera FPGAs. EE Times Programmable Logic Designline. February, 2015. Available at: <http://infoscience.epfl.ch/record/204540/files/Implementing%20super-efficient%20FFTs%20in%20Altera%20FPGAs.pdf?version=1>.
15. McClellan J.H., Rader C.M. Number Theory in Digital Signal Processing. N.Y., Prentice-Hall, Inc., 1979.
16. McClellan J.H., Schafer R.W., Yoder M.A. Signal Processing First. Pearson Education, 2003, 516 p.
17. Omondi A., Premkumar B. Residue Number Systems: Theory and Implementation. Imperial College Press, 2007. 296 p.

ГАЛАНИНА НАТАЛИЯ АНДРЕЕВНА – доктор технических наук, профессор кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (galaninacheb@mail.ru).

ПЕСОШИН ВАЛЕРИЙ АНДРЕЕВИЧ – доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных систем, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Россия, Казань (pesoshin-kai@mail.ru).

ИВАНОВА НАДЕЖДА НИКОЛАЕВНА – кандидат технических наук, доцент кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (naadeezdaa@rambler.ru).

КАЛМЫКОВ БАГДАТ МИННАЛИМОВИЧ – кандидат технических наук, заведующий кафедрой вычислительной техники, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (bagdat56@mail.ru).

ДМИТРИЕВ ДМИТРИЙ ДМИТРИЕВИЧ – аспирант кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (3deemon@gmail.com).

N. GALANINA, V. PESOSHIN, N. IVANOVA,
B. KALMYKOV, D. DMITRIEV

HARDWARE IMPLEMENTATION
OF FAST FOURIER TRANSFORM ALGORITHM
WITH DESIRED PROPERTIES IN RESIDUE NUMBER SYSTEM

Key words: performance, Fast Fourier Transform (FFT), residue number system (RNS), residues, RNS channel, weight coefficient, «butterfly» operation.

Reducing the time of data processing is an urgent task in the construction of devices of the spectral analysis. In this article RNS theory proposed to improve the performance of digital devices of spectral analysis. Circuit of the FFT device in RNS and its functional blocks are designed. The resulting FFT devices due to RNS has higher performance compared to devices built on the basis of classical methods.

References

1. Akushskii I.Ya., Yuditskii D.I. *Mashinnaya arifmetika v ostatochnykh klassakh* [Machine arithmetic in residual classes]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1968, 440 p.
2. Al'tman E.A. *Optimizatsiya vychislitel'noi skhemy bystrogo preobrazovaniya Fur'e* [Optimization of computational scheme of fast Fourier transformation]. *Omskii nauchnyi vestnik* [Omsk Scientific Bulletin], 2008, no. 1(64), pp. 149–151.
3. Galanina N.A. *Metody i vychislitel'nye ustroystva tsifrovoi obrabotki signalov v sisteme ostatochnykh klassov: dis. ... d-ra tekhn. nauk* [Computational methods and apparatus for digital signal processing in the residue number system. Doct. Diss.]. Kazan, 2010, 268 p.
4. Galanina N.A. *Sintez funktsional'nykh modulei BPF v SOK* [Synthesis of FFT functional modules in RNS]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2005, no. 2, pp. 124–127.
5. Galanina N.A., Dmitriev D.D. *Razrabotka konfiguratsionnogo faila dlya realizatsii diskretnogo preobrazovaniya Fur'e v sisteme ostatochnykh klassov na PLIS* [Development of a configuration file for the implementation Discrete Fourier Transform in Residue Number System on FPGA]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2011, no. 2, pp. 119–125.
6. Galanina N.A., Efimov A.D. *Modelirovanie optimal'nykh algoritmov bystrogo preobrazovaniya Fur'e i ikh sravnitel'nyi analiz* [Simulation of optimal algorithms of fast Fourier transformations and their comparative analysis]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2009, no. 2, pp. 200–209.
7. Galanina N.A., Pesoshin V.A., Ivanova N.N. *Razrabotka ustroystv tsifrovoi fil'tratsii i spektral'nogo analiza s indeksirovaniem dannykh v sisteme ostatochnykh klassov* [Development of devices of digital filtration and spectral analysis with the index of the data in Residue Number System]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2014, no. 2, pp. 93–97.
8. Gushchin A.V., Litvinov V.L. *Sovremennye metody i sredstva realizatsii algoritmov bystrogo preobrazovaniya Fur'e v informatsionnykh sistemakh* [Modern methods and means of implementing the Fast Fourier Transform algorithms in information systems]. *Aktual'nye problemy infotele-*

kommunikatsii v nauke i obrazovanii: sb. materialov II Mezhdunar. nauch.-tekhn. i nauch.-metod. konf. [Proc. of II Int. Sci. Conf. «Actual infotelecommunications problems in science and education»]. St. Petersburg, 2013, pp. 564–567.

9. Kapitanov V., Mistyukov V., Volodin P. *Odnokristal'naya realizatsiya algoritma BPF na PLIS firmy XILINX* [Single-chip implementation of the FFT algorithm on an Xilinx FPGA]. *Komponenty i tekhnologii* [Components and Technologies], 2000, no. 5, pp. 52–55.

10. Markovich I.I. *Sovmeshchennye algoritmy vychisleniya DPF deistvitel'nykh signalov* [Combined algorithms for calculating DFT of real signals]. *Iskusstvennyi intellekt. Intellektual'nye sistemy (II-2012): sb. materialov Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. [Proc. of Sci. Conf. «Artificial Intelligence. Intelligent systems»]*. Krasnodar, Nauka Publ., 2012, pp. 111–114.

11. Blahut R. *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Cambridge University Press, 2010, 469 p.

12. Cardarilli G.C., Nannarelli A., Re M. *Residue Number System for Low-Power DSP Applications*. Proc. of 41st Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, 2007. Available at: <http://www.imm.dtu.dk/~alna/pubs/asil07b.pdf>.

13. Chaves R., Sousa L. *RDSP: a RISC DSP based on residue number system*. Proc. of the Euro-micro Symposium on Digital System Design (DSD'03). Inesc-ID, Lisboa, Lisbon, Portugal, 2003. DOI: 10.1109/DSD.2003.1231911.

14. Leclère J., Botteron C., Farine P.-A. *Implementing super-efficient FFTs in Altera FPGAs*. EE Times Programmable Logic Designline. February, 2015. Available at: <http://infoscience.epfl.ch/record/204540/files/Implementing%20super-efficient%20FFTs%20in%20Altera%20FPGAs.pdf?version=1>.

15. McClellan J.H., Rader C.M. *Number Theory in Digital Signal Processing*. N.Y., Prentice-Hall, Inc., 1979.

16. McClellan J.H., Schafer R.W., Yoder M.A. *Signal Processing First*. Pearson Education, 2003, 516 p.

17. Omondi A., Premkumar B. *Residue Number Systems: Theory and Implementation*. Imperial College Press, 2007. 296 p.

GALANINA NATALIA – Doctor of Technical Sciences, Professor, Information Systems Math and Hardware Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

PESOSHIN VALERY – Doctor of Technical Sciences, Professor of Computer Systems Department, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Russia, Kazan.

IVANOVA NADEZHDA – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, Information Systems Math and Hardware Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

KALMYKOV BAGDAT – Candidate of Technical Sciences, Head of Computer Technology Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

DMITRIEV DMITRIY – Post-Graduate Student, Department of Information Systems Mathematical and Hardware Provision, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

Ссылка на статью: Галанина Н.А., Песошин В.А., Иванова Н.Н., Калмыков Б.М., Дмитриев Д.Д. Аппаратурная реализация алгоритма быстрого преобразования Фурье с заданными свойствами в системе счисления в остаточных классах // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 119–126.

УДК 519.6:519.852]:621.3.011.71

ББК В192.1: 3211.04

А.Ю. ИВАНИЦКИЙ, А.М. УРУСОВ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА ПОТОЧЕЧНОЙ НЕВЯЗКИ

Ключевые слова: неустойчивые задачи, система линейных алгебраических уравнений и неравенств с приближенными данными, интегральные уравнения Фредгольма I рода, неустойчивые электротехнические задачи.

В статье рассматривается метод поточечной невязки для численного решения неустойчивых систем линейных алгебраических уравнений и неравенств с приближенными данными, заданными в поточечной форме, интегральных уравнений Фредгольма I рода на классе неотрицательных искомых решений. Предлагаются эффективный алгоритм и программный продукт для численного решения некоторых неустойчивых электротехнических задач, которые могут быть сведены к указанным выше задачам.

1. Во многих прикладных задачах, в том числе в электротехнических, естественное стремление исследователя наиболее полно отобразить в математической модели существенные моменты изучаемого процесса часто приводят к математическим задачам, в которых искомое решение должно удовлетворять априорно заданным условиям. Базой для задания таких условий служат некоторые общие представления о поведении изучаемого физического процесса, что в конечном итоге в математической постановке задачи приводит к описанию допустимого множества решений путём выделения характерных точек (экстремальных, перемен знака, кривизны и т.п.) и областей (знакоопределённых и т.п.). Так, например, при решении задач линейного программирования обычно в качестве множества допустимых решений рассматривают множество $D = R_+^n = \{u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T : u_j \geq 0, j = \overline{1, n}\}$ или при нахождении монотонно возрастающих решений дискретных аппроксимаций интегрального уравнения Фредгольма I рода возникает необходимость получения решений систем линейных алгебраических уравнений, принадлежащих априорно заданному множеству $D = \{u \in R^n : u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n\}$. Задание априорных условий можно характеризовать как неявное формирование модели «каркаса» этого решения, а сам метод – как математическую реконструкцию этого каркаса. Наиболее полный учёт априорной информации приводит к качественному воспроизведению искомого точного решения, а в некоторых случаях может облегчить и ускорить получение конечного решения.

Обозначим через D замкнутое множество, учитывающее априорную информацию об искомом решении. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений и неравенств

$$\overline{A}u = \overline{f}, \overline{B}u \leq \overline{g}, \quad (1)$$

где $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \in D \subseteq R^n$ – искомый вектор,

$$\overline{A} = \{\overline{a}_{ij}\} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \dots & \overline{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \dots & \overline{a}_{mn} \end{bmatrix} \in R^{m \times n}, \overline{B}_{sj} = \{\overline{b}_{sj}\} = \begin{bmatrix} \overline{b}_{11} & \overline{b}_{12} & \dots & \overline{b}_{1n} \\ \overline{b}_{21} & \overline{b}_{22} & \dots & \overline{b}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{b}_{p1} & \overline{b}_{p2} & \dots & \overline{b}_{pn} \end{bmatrix} \in R^{p \times n},$$

$$\overline{f} = [\overline{f}_1, \overline{f}_2, \dots, \overline{f}_m]^T \in R^m, \overline{g} = [\overline{g}_1, \overline{g}_2, \dots, \overline{g}_p]^T \in R^p,$$

$R^{m \times n}$ и $R^{p \times n}$ – линейные пространства вещественных матриц порядка $m \times n$ и $p \times n$, соответственно; R^n , R^m , R^p – вещественные линейные пространства векторов размерности n , m и p , соответственно.

Предположим, что система (1) разрешима, но, возможно, неоднозначно. Обозначим через \bar{U}_D множество её решений.

Пусть вместо точных данных $\bar{A}, \bar{B}, \bar{f}, \bar{g}$ известны их приближения $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{f}, \tilde{g}$:

$$\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} \in R^{m \times n}, \tilde{B}_{sj} = \{\tilde{b}_{sj}\} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1n} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{b}_{p1} & \tilde{b}_{p2} & \dots & \tilde{b}_{pn} \end{bmatrix} \in R^{p \times n}$$

$$\tilde{f} = [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m]^T \in R^m, \tilde{g} = [\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_p]^T \in R^p$$

такие, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| &\leq \Delta_{ij}, |\tilde{f}_i - f_i| \leq \delta_i, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \\ |\tilde{b}_{sj} - b_{sj}| &\leq \Lambda_{sj}, |\tilde{d}_s - d_s| \leq \lambda_s, s = \overline{1, p}, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta_{ij}, \delta_i, \Lambda_{sj}, \lambda_s$ – заданные поточечные уровни погрешностей входных данных $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{f}, \bar{g}\}$. Легко убедиться на простейших примерах, что система

$$u \in D: \tilde{A}u = \tilde{f}, \tilde{B}u \leq \tilde{d} \quad (3)$$

может оказаться неразрешимой, а в случае её разрешимости решения могут не обладать свойством устойчивости (см. примеры модельных задач в п. 3). Поэтому для решения таких задач необходимо использовать методы регуляризации [1–10]. Одним из таких методов является метод поточечной невязки, представленный ниже.

2. А.Н. Тихонов в работе [8] предложил рассматривать приближенные системы, задаваемые с помощью индивидуальной приближенной системы (3) и класса систем, эквивалентных ей по точности. В этих работах точность задания входных данных оценивается в среднеквадратической форме. Такой подход приводит к методу регуляризации, при использовании которого необходимо многократно решать нелинейную оптимизационную задачу. Рассмотренные в работе [3] методы приводят к более простым методам регуляризации, в которых надо лишь однократно решать задачу оптимизации и в некоторых случаях при соответствующем выборе множества D – линейную оптимизационную задачу.

Определим классы матриц:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{A \in R^{m \times n} : |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| \leq \Delta_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}, \\ \mathbf{B} &= \{B \in R^{p \times n} : |b_{sj} - \tilde{b}_{sj}| \leq \Lambda_{sj}, s = \overline{1, p}, j = \overline{1, n}\}, \\ \mathbf{F} &= \{f \in R^m : |f_i - \tilde{f}_i| \leq \delta_i, i = \overline{1, m}\}, \\ \mathbf{G} &= \{g \in R^p : |g_s - \tilde{g}_s| \leq \lambda_s, s = \overline{1, p}\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем считаем, что $\bar{A} \in \mathbf{A}, \bar{B} \in \mathbf{B}, \bar{f} \in \mathbf{F}, \bar{g} \in \mathbf{G}$. Вместо индивидуальной приближенной системы (3) рассмотрим совокупность систем:

$$u \in D: Au = f, Bu \leq g, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}, f \in \mathbf{F}, g \in \mathbf{G}. \quad (5)$$

Аналогично [8] допустимым решением класса систем (5) назовём любой вектор \bar{u} такой, что

$$\bar{u} \in D: \bar{A}\bar{u} = \bar{f}, \bar{B}\bar{u} \leq \bar{g}, \exists \bar{A} \in A, \exists \bar{B} \in B, \exists \bar{f} \in F, \exists \bar{g} \in G.$$

Множество допустимых значений обозначим через \bar{U}_D . Очевидно, что $\bar{U}_D \subseteq \hat{U}_D$. Аналогично [1] можно доказать теорему:

Теорема 1. Множество \hat{U}_D эквивалентно множеству

$$\tilde{U}_D = \{u \in D: \left| \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} u_j - \tilde{f}_i \right| \leq \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} |u_j| + \delta_i, i = \overline{1, m}, \sum_{s=1}^p \tilde{b}_{sj} u_j - \tilde{g}_s \leq \sum_{s=1}^p \Lambda_{sj} |u_j| + \lambda_s, s = \overline{1, p}\}.$$

Множество \tilde{U}_D имеет более конструктивный вид, чем множество \hat{U}_D , с точки зрения численных расчётов. Вообще говоря, множество \tilde{U}_D (или \hat{U}_D) имеет диаметр, стремящийся к бесконечности. Тем не менее оно может быть положено в основу метода определения устойчивых решений системы (1). Этот метод основан на решении следующей задачи минимизации [3, 4]:

$$\|Lu\|_1 \rightarrow \inf, u \in \tilde{U}_D, \quad (6)$$

где $L \in R^{q \times n}$ – заданная матрица порядка $q \times n$, $\|\cdot\|_1$ – какая-либо норма в пространстве R^q . При надлежащем выборе матрицы L любое решение задачи (6) можно взять в качестве приближенных решений задачи (1), причем множество \tilde{U}_* решений задачи (6) будет сходиться в определенном смысле к непустому множеству U_* решений задачи

$$\|Lu\|_1 \rightarrow \inf, u \in U_D. \quad (7)$$

Способ (6) отбора приближенных решений задачи (1) при поточечном задании погрешностей (2) назовём **методом поточечной невязки**.

Пусть выполнено условие дополнителности: существуют константы $\gamma > 0, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, 3}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0$ такие, что

$$\gamma \|u\| \leq \alpha_1 \|Lu\|_1 + \alpha_2 \|\bar{A}u\|_{II} + \alpha_3 \|(\bar{B}u)^+\|_{III}, \forall u \in D, \quad (8)$$

где $\|\cdot\|, \|\cdot\|_I, \|\cdot\|_{II}, \|\cdot\|_{III}$ – произвольные векторные нормы в пространствах R^n, R^q, R^m и R^p , соответственно; $z^+ = (z_1^+, z_2^+, \dots, z_p^+)^T$, $z_i^+ = \max\{0; z_i\}$, $i = \overline{1, p}$ – срезка вектора $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$. В [3] показано, что условие дополнителности (8) эквивалентно условию

$$\ker \bar{A} \cap \ker L \cap \{u: \bar{B}u \leq 0\} \cap \bar{K}_D = \{0\}, \quad (9)$$

где $\ker \bar{A} = \{u: \bar{A}u = 0\}$, $\ker L = \{u: Lu = 0\}$ – ядра матриц \bar{A} и L , соответственно; $\bar{K}_D = \{v: v = tu, u \in D, t \in R_+\}$ – замкнутый выпуклый конус с вершиной в нуле, натянутый на множество D . Из условия (9) (или (8)) следует, что если $\ker L = 0$, то условие дополнителности выполнено всегда для произвольных матриц \bar{A}, \bar{B} и любого замкнутого множества $D \subseteq R^n$. Например, при нахождении нормальных решений системы (1) имеем

$$L = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, $\ker L = \ker E = \{0\}$, и матрицы \bar{A} и \bar{B} могут быть вырожденными. В этом случае функция $\|Lu\|_I$ является стабилизатором как и в классических методах регуляризации [9]. Однако при выполнении условия (8) в поточечном методе невязки необязательно требование, чтобы $\|Lu\|_I$ был стабилизатором. Приведем пример.

Пример. Пусть $D = \{u = [u_1, u_2, u_3]^T \in R^3 : u_3 = 0\}$, $\bar{A}u = [u_1, 0, 0]^T$, $Lu = [0, u_2, 0] \forall u \in R^3$. Тогда условие (8) (или (9)) выполнено при любой матрице $\bar{B} \in R^{p \times 3}$. В этом случае множество Лебега $L_y = \{u \in R^3 : \|Lu\|_I = |u_2| \leq y\}$ неограниченно и, следовательно, $\|Lu\|_I$ не является стабилизатором.

Условие дополненности (8) (или (9)) связывает матрицы \bar{A}, \bar{B}, L и множество D и заключает в себе идею компенсации «плохих» сторон некоторых из этих объектов «хорошими» свойствами других. Это позволяет рассматривать широкий класс задач и методов их регуляризации с более ослабленными требованиями к матрицам \bar{A}, \bar{B}, L и множеству D , чем в традиционных случаях, когда априорно подразумевается, что $\|Lu\|_I$ – стабилизатор.

При численной реализации метода поточечной невязки (6) достаточно определить вектор $u = u(\varepsilon, \sigma)$ из условия

$$u \in \tilde{U}_D : \|Lu\|_I \leq \tilde{\mu}_* + \varepsilon, \varepsilon \geq 0, \quad (10)$$

где $\tilde{\mu}_* = \inf_{u \in \tilde{U}_D} \|Lu\|_I$, $\sigma = \{\Delta_{ij}, \Lambda_{sj}, \delta_i, \lambda_s\}$ – набор погрешностей входных данных из (2). Пусть U, V – непустые множества и $\beta(U, V) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} \|u - v\|$.

Сходимость метода поточечной невязки устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условие дополненности и $U_D \neq \emptyset$. Тогда множество $\tilde{U}_*(\varepsilon, \sigma)$ векторов, удовлетворяющих условию (10), непусто и

$$\beta(\tilde{U}_*(\varepsilon, \sigma), U_*) \rightarrow 0$$

при $\sigma \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, где U_* – множество решений задачи (7).

Эта теорема позволяет рассматривать в качестве приближённых решений задачи (7) векторы, полученные из условия (10). В следующем пункте мы рассмотрим численные реализации метода поточечной невязки (6) на модельных задачах.

3. Рассмотрим примеры неустойчивых задач, в которых стандартные методы приводят к численно неустойчивым решениям. В качестве первой модельной задачи возьмем простую задачу определения нормального решения системы двух линейных алгебраических уравнений. На этом примере легко понять суть проблемы неустойчивости и то, как «преодолевают» её метод поточечной невязки.

Модельная задача 1. Найти вектор $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}_+^2$ из условий

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 = 6, \\ \sqrt{2}u_1 + \sqrt{18}u_2 = \sqrt{72}. \end{cases} \quad (11)$$

Эта система вырожденная, так как второе уравнение получается из первого умножением на число $\sqrt{2}$. Множество её решений непусто: $U = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}_+^2 : u_1 + 3u_2 = 6\} \neq \emptyset$.

Рассмотрим нормальное решение этой системы

$$\|\mathbf{u}\| \rightarrow \inf, \mathbf{u} \in U. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, если взять евклидову норму $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, то нормальным решением будет вектор $\mathbf{u}_*^2 = [0.6, 1.8]^T$, $\|\mathbf{u}_*^2\| = \sqrt{3.6}$; если октаэдрическую норму $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|_1 = |u_1| + |u_2|$, то $\mathbf{u}_*^1 = [0, 2]^T$, $\|\mathbf{u}_*^1\| = 2$; если чебышёвскую, то $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|\}$ и $\mathbf{u}_*^\infty = [1.5, 1.5]^T$, $\|\mathbf{u}_*^\infty\| = 1.5$.

Пусть k – число удерживаемых цифр после десятичной точки в $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$, $\sqrt{18} = 4.24264068\dots$, $\sqrt{72} = 8.48528137\dots$. При этом ошибка округления не превышает величины $\Delta = 0.5 \cdot 10^{-k}$.

Попытаемся решить задачу (12) с помощью стандартного математического обеспечения «Gaussian Elimination» в среде Maple2015 при различных k , например, взяв $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Численное решение методом Гаусса при различных k

\mathbf{u}	Точное решение	k					
		0	1	2	3	4	5
u_1	0.6	0	–	–	3.000	–	0.00000
u_2	1.8	2	–	–	1.000	–	2.00000

Как видно из табл. 1, при $k = 1, 2, 4$ задача (1) не имеет решения, а при $k = 0, 3, 5$ решения носят неустойчивый характер и не являются хорошим приближением к $\mathbf{u}_*^2 = [0.6, 1.8]^T$. Округление иррациональных чисел $\sqrt{2}, \sqrt{18}, \sqrt{72}$ можно интерпретировать как внесение возмущений. При этом очень мало отличающиеся друг от друга возмущения приводят к системам, решения которых существенно отличаются, или к несовместным системам. Это типичная некорректно поставленная задача. Причина такого поведения решений задачи (12) при различных k легко объясняется. Говоря геометрическим языком, каждое уравнение системы (11) представляет прямую на плоскости, причем эти линии совпадают.

Если же во втором уравнении (11) заменить числа $\sqrt{2}, \sqrt{18}$ и $\sqrt{72}$ на их приближенные значения, то эти прямые могут пересекаться в одной точке, как, например, на рис. 2 при $k = 0$, тогда нормальным решением будет вектор $\mathbf{u}_*^2 = [0, 2]^T$, или

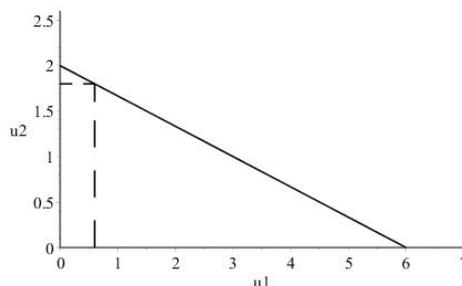


Рис. 1. Прямые совпадают. Нормальное решение $\mathbf{u}_*^2 = [0.6, 1.8]^T$

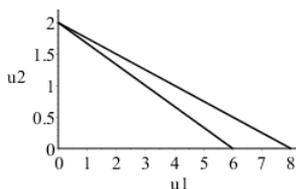


Рис. 2. Прямые пересекаются в одной точке $u_*^2 = [0, 2]^T$

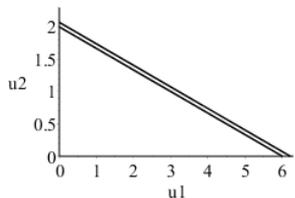


Рис. 3. Прямые не пересекаются

не пересекаться, как, например, на рис. 3 при $k = 1$, тогда задача (12) не имеет решения.

Множество решений системы (11) слишком «тонкое» (прямые линии совпадают) и при замене чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$ и $\sqrt{72}$ на их приближения, т.е. при внесении ошибок округления, каким бы малым оно ни было, эта «тонкость» нарушается, и прямые пересекаются в одной точке или вовсе не пересекаются при различных k .

Теперь решим задачу (12), используя метод поточечной невязки (6) или (10), при различных k в среде Maple2015. Пусть в задаче (12) $D = R_+^2$ и $\|u\| = \|u\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, тогда задача (6) сводится к задаче квадратичного программирования.

$$u_1^2 + u_2^2 \rightarrow \inf, u \in \tilde{U}_D, \quad (13)$$

где \tilde{U}_D – множество векторов из $u = [u_1; u_2]^T \in D$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11} - \Delta_{11})u_1 + (\tilde{a}_{12} - \Delta_{12})u_2 \leq \tilde{f}_1 + \delta_1, \\ (-\tilde{a}_{11} - \Delta_{11})u_1 + (-\tilde{a}_{12} - \Delta_{12})u_2 \leq -\tilde{f}_1 + \delta_1, \\ (\tilde{a}_{21} - \Delta_{21})u_1 + (\tilde{a}_{22} - \Delta_{22})u_2 \leq \tilde{f}_2 + \delta_2, \\ (-\tilde{a}_{21} - \Delta_{21})u_1 + (-\tilde{a}_{12} - \Delta_{12})u_2 \leq -\tilde{f}_2 + \delta_2. \end{cases} \quad (14)$$

В табл. 2 приводится численное решение задачи (13) при различных k в среде Maple2015.

Таблица 2

Численное решение задачи методом поточечной невязки при $D = R_+^2, \|u\| = \|u\|_2$

k	Относительная ошибка округления элементов		\tilde{u}_{*1}	\tilde{u}_{*2}	$\ \tilde{u}_*\ _2^2$	$\ u_* - \tilde{u}_*\ _2^2$	$\ u_*\ _2^2 - \ \tilde{u}_*\ _2^2$
	матрицы A	вектора f					
0	22%	8%	1	2	4	0	0
1	1.8%	0.7%	0.6	1.8	3.5	0.01	0.1
2	0.18%	0.07%	0.61	1.79	3.59	0.001	0.01
3	0.018%	0.007%	0.599	1.799	3.598	0.0001	0.002
4	0.0018%	0.0007%	0.6	1.7999	3.5999	0.00001	0.0001
5	0.00018%	0.00007%	0.6	1.79999	3.59999	0.000001	0.00001
6	0.000018%	0.000007%	0.6	1.799999	3.599999	0.0000001	0.000001

Пусть в задаче (13) $D = R_+^2$ и $\|u\| = \|u\|_1 = |u_1| + |u_2|$, тогда задача (6) сводится к задаче линейного программирования

$$u_1^2 + u_2^2 \rightarrow \inf, u \in \tilde{U}_D, \quad (15)$$

где \tilde{U}_D определяется системой неравенств (14). В табл. 3 приводится численное решение задачи (15) симплекс-методом в среде Maple2015 при различных k .

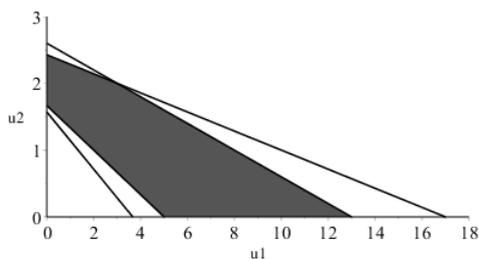
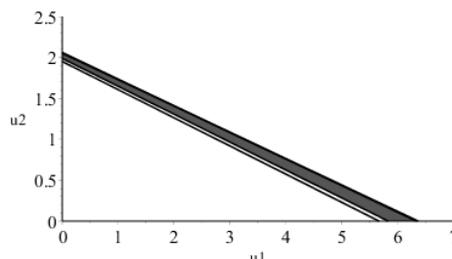
Таблица 3

Численное решение задачи методом поточечной невязки
при $D = R_+^2, \|u\| = \|u\|_1$

k	Относительная ошибка округления элементов		\tilde{u}_{*1}	\tilde{u}_{*2}	$\ \tilde{u}_{*}\ _1$	$\ u_{*} - \tilde{u}_{*}\ _1$	$\ u_{*}\ _1 - \ \tilde{u}_{*}\ _1$
	матрицы A	вектора f					
0	16%	8%	0	2	2	0	0
1	1.4%	0.7%	0	1.9	1.9	0.1	0.1
2	0.13%	0.07%	0	1.99	1.99	0.01	0.01
3	0.013%	0.007%	0	1.999	1.999	0.001	0.001
4	0.0014%	0.0007%	0	1.9999	1.9999	0.0001	0.0001
5	0.00014%	0.00007%	0	1.99999	1.99999	0.00001	0.00001
6	0.000015%	0.000007%	0	1.999999	1.999999	0.000001	0.000001

Из табл. 2 и 3 видно, что \tilde{u}_{*} являются хорошими приближениями к точному решению u_{*} при увеличении числа k удерживаемых цифр после десятичной точки. При этом $\|u_{*} - \tilde{u}_{*}\| = O(10^{-k})$, т.е. метод поточечной невязки позволяет получать приближённые решения с точностью до порядка задания погрешностей входных данных системы (11): $\Delta_{11} = 0, \Delta_{12} = 0, \delta_1 = 0$ (так как первое уравнение в системе задано точно) и $\Delta_{21} \leq 0.5 \cdot 10^{-k}, \Delta_{22} \leq 0.5 \cdot 10^{-k}, \delta_2 \leq 0.5 \cdot 10^{-k}$.

Заметим, что в задачах (13) и (15) допустимое множество \tilde{U}_D (или \hat{U}_D) не такое «тонкое», как в исходной задаче (12) (см. рис. 1). Так, например, при $k = 0$ и $k = 1$ множества \tilde{U}_D изображены на рис. 4. и 5, соответственно.

Рис. 4. Допустимое множество при $k = 0$ Рис. 5. Допустимое множество при $k = 1$

В методе поточечной невязки допустимое множество содержит решение задачи (12) $u_{*}^2 = [0.6, 1.8]^T$ (при $\|u\| = \|u\|_2$) или $u_{*}^1 = [0, 2]^T$ (при $\|u\| = \|u\|_1$), при любом k как, например, на рис. 4 и 5, а при использовании стандартной подпрограммы «GaussianElimination» множество допустимых решений может и не содержать решение задачи (12), как, например, на рис. 2 и 3.

В методе поточечной невязки устойчивость достигается за счёт **поэлементного (поточечного)** согласования компонент вектора невязки $\tilde{A}u - \tilde{f}$ с поэлементными погрешностями входных данных.

Таким образом, на этом простом примере показана проблема неустойчивости и то, как достигается устойчивость в методе поточечной невязки.

Модельная задача 2. Решить интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$\int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x), c \leq x \leq d, \quad (16)$$

где

$$K(x, s) = [1 + (x - s)^2], \quad [c; d] = [-2; 2], \quad [a; b] = [-1; 1],$$

$$f(x) = (2 - x^2) \cdot [\arctg(1 - x) + \arctg(1 + x)] - 2 - x \cdot \ln \frac{1 + (1 - x)^2}{1 + (1 + x)^2}.$$

Точное решение уравнения (16) – функция $\bar{u}(s) = 1 - s^2$.

Подобного рода задачи относятся к «сильно» неустойчивым задачам, так как число обусловленности матрицы системы уравнений, аппроксимирующей интегральное уравнение (16), очень большое (порядка несколько тысяч) [5].

Аппроксимируем уравнение (16) на равномерных сетках $x_{i+1} = x_i + h_i$, $x_1 = -2$, $i = \overline{1, 41}$, $h_i = 0.1$ и $s_{j+1} = s_j + h_j$, $s_1 = -1$, $j = \overline{1, 41}$, $h_j = 0.05$, используя для интеграла формулу Симпсона. В итоге мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{A}u = \tilde{f}, \quad (17)$$

где $\tilde{A} = K \cdot N$, $K = \{k_{ij}\} = K(x_i, s_j) \in \mathbf{R}^{41 \times 41}$, $N \in \mathbf{R}^{41 \times 41}$ – диагональная матрица квадратурной формулы с элементами N_j на диагонали или, подробнее,

$$\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\} \in \mathbf{R}^{41 \times 41}, \quad \tilde{a}_{ij} = \frac{N_j h_i}{1 + (x_i - s_j)^2}, \quad (18)$$

$$\tilde{f} = f[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{41})]^T$$

где N_j – квадратурные коэффициенты формулы Симпсона.

Если решать систему (17) методом Гаусса в среде Maple2015, то мы получим её приближенное решение, которое очень сильно отличается от **точного решения**. Результаты вычислений представлены на рис. 6. и табл. 4.

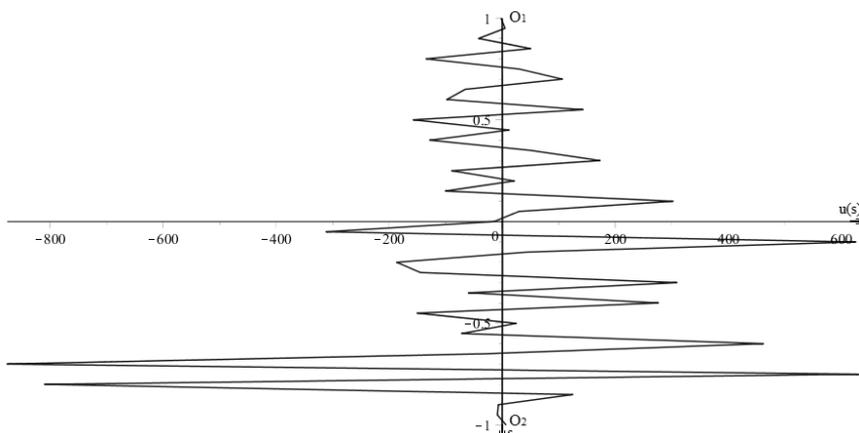


Рис. 6. Решение системы (17) методом Гаусса

Таблица 4

Решение системы (17) методом Гаусса

Норма	Погрешность решения	Невязка
$\ \tilde{u} - u\ _2$	1746.703847	2.28357990278258
$\ \tilde{u} - u\ _1$	6911.6993266410008	12.9239639973000

На рис. 6. непрерывная линия на отрезке $[-1, 1]$ – точное решение $u(s) = 1 - s^2$ и пилообразная кривая, полученная методом Гаусса. Пилообразность приближенного решения настолько велика, что точное решение в данном масштабе выглядит как вертикальный отрезок O_1O_2 . Из табл. 4 видно, что погрешность аппроксимации точного решения приближённым очень велика – порядка $O(10^3)$.

Далее приведём численное решение уравнения (16), точнее его дискретного аналога (17), методом поточечной невязки (6) для двух случаев:

1) на классе неотрицательных функций $u(s) \geq 0$;

2) на классе неотрицательных ($u(s) \geq 0$), монотонных ($\frac{du}{ds} \geq 0, s \in [-1; 0]$ и

$\frac{du}{ds} \leq 0, s \in [0; 1]$) и выпуклых ($\frac{d^2u}{ds^2} \leq 0, s \in [-1; 1]$) функций.

Поскольку в методе поточечной невязки матрицу L мы выбираем сами, в задаче (6) возьмем $L = E$ (E – единичная матрица). Как отмечалось ранее, тогда условие дополненности (8) выполнено. В первом случае метод приводит к оптимизационной задаче:

$$\|u\|_l \rightarrow \inf, u \in \tilde{U}_+, \quad (19)$$

где $\tilde{U}_+ = \{u \in D = R_+^{41} : \left| \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} u_j - \tilde{f}_i \right| \leq \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} u_j + \delta_i, i = \overline{1, 41}\}$ (\tilde{a}_{ij} и \tilde{f}_i вычисляются по формулам (18)). Во втором случае получим следующую задачу:

$$\|u\|_l \rightarrow \inf, u \in \tilde{U}_D, \quad (20)$$

где $\tilde{U}_D = \tilde{U}_+ \cap D$, \tilde{U}_+ такое же множество, что и в задаче (19), а D определяется дискретными аналогами монотонности

$$u_{j+1} - u_j \geq 0, j = \overline{1, 20},$$

$$u_{j+1} - u_j \leq 0, j = \overline{21, 40}$$

и выпуклости

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{h_j} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h_{j-1}} \leq 0, j = \overline{2, 40}.$$

Погрешности Δ_{ij} и δ_i определим следующим образом:

$$\Delta_{ij} = |\xi_{ij}| \cdot 10^{-k}, \delta_i = |\eta_i| \cdot 10^{-k},$$

где ξ_{ij} и $\eta_i, i = \overline{1, 41}, j = \overline{1, 41}$ – равномерно распределенные случайные числа на отрезке $[-1; 1]$, полученные с помощью стандартной программы «RandomTools(uniform)» в среде Maple2015, $k = \overline{1, 6}$.

Численные расчеты приведены для различных норм $\|u\|_l$. В задачах (19) и (20) ограничения в множестве \tilde{U}_D являются линейными алгебраическими неравенствами. Следовательно, при норме $\|u\|_1 = \|u\|_1 = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_{41}|$, $u \in R_+^{41}$ мы вместо (19) имеем задачу линейного программирования

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{41} \rightarrow \inf, u \in \tilde{U}_+, \quad (21)$$

а вместо (20) –

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{41} \rightarrow \inf, \mathbf{u} \in \tilde{U}_D. \quad (22)$$

Если $\|\mathbf{u}\|_1 = \|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{41}^2}$, то будем иметь задачу квадратичного программирования.

Ниже приведена программа для численного решения интегрального уравнения Фредгольма I рода в среде Maple2015.

Программа

Формируется матрица \tilde{A} и вектор \tilde{f}

$A = K \cdot N$

$K = K(x_i, s_j)$

N – матрица коэффициентов квадратурной формулы.

$f = f(x_i)$

$MatrixK := Matrix(41, 41) :$

for i **from** 1 **to** 41 **do**

for j **from** 1 **to** 41 **do**

$MatrixK[i, j] := evalf(K(x[i], y[j]))$ **end do** **end do**;

$MatrixN := Matrix(41, 41) :$

$VectorF := Vector(41) :$

for i **from** 1 **to** 41 **do** $VectorF[i] := evalf(f(x[i]))$ **end do**;

$MatrixA := Matrix(41, 41) :$ $MatrixA := multiply(MatrixK, MatrixN) :$

Формируется множество \tilde{U}_*

$MnewPL := evalm(multiply(MatK, MatrN) - \Delta) :$

$MnewPR := evalm(VectF + \delta) :$

$MnewML := evalm(-multiply(MatK, MatrN) - \Delta) :$

$MnewMR := evalm(-VectF + \delta) :$

$newPlusLeft := evalm(multiply(MnewPL, VectorU)) :$

$newMinusLeft := evalm(multiply(MnewML, VectorU)) :$

Неотрицательность (как опция пакета «Optimization»),

монотонность и выпуклость множества \tilde{U}_*

$MatrB := Matrix(40, 41) :$

for i **from** 1 **to** 40 **do**

for j **from** 1 **to** 41 **do**

if $i = j \leq 19$ **then** $MatrB[i, j] := 1$ **elif** $i \neq j$ **then** $MatrB[i, j] := 0$ **end if** **end do** **end do**;

for i **from** 1 **to** 40 **do**

for j **from** 1 **to** 41 **do**

if $i + 1 = j \leq 20$ **then** $MatrB[i, j] := -1$ **end if** **end do** **end do**;

for i **from** 1 **to** 40 **do**

for j **from** 1 **to** 41 **do**

if $i + 1 = j > 20$ **then** $MatrB[i, j] := 1$ **end if** **end do** **end do**;

for i **from** 1 **to** 40 **do**

for j **from** 1 **to** 40 **do**

if $i = j > 19$ **then** $MatrB[i, j] := -1$ **end if** **end do** **end do**;

```

MatrA3 := Matrix(41·2 + (41 - 1), 41) :
for i from 1 to 2·41 + (41 - 1) do
  for j from 1 to 41 do
    if i ≤ 41 then MatrA3[i, j] := MnewPL[i, j] elif 2·41 ≥ i > 41 then MatrA3[i, j] := MnewML[i - 41, j]
      elif i > 2·41 then MatrA3[i, j] := MatrB[i - 2·41, j] end if end do end do;
Vect3 := Vector(2·41 + (41 - 1)) :
for i from 1 to 2·41 do
  if i ≤ 41 then Vect3[i] := MnewPR[i] elif i > 41 then Vect3[i] := MnewMR[i - 41] end if end do;
MatrBdop := Matrix(39, 41) :
for i from 1 to 39 do
  for j from 1 to 41 do
    if i = j then MatrBdop[i, j] := 1 elif i ≠ j then MatrBdop[i, j] := 0 end if end do end do;
for i from 1 to 39 do
  for j from 1 to 41 do
    if i + 1 = j then MatrBdop[i, j] := -2 end if end do end do;
for i from 1 to 39 do
  for j from 1 to 41 do
    if i + 2 = j then MatrBdop[i, j] := 1 end if end do end do;
MatrA4 := Matrix(41·2 + (41 - 1) + (41 - 2), 41) :
for i from 1 to 2·41 + (41 - 1) + (41 - 2) do
  for j from 1 to 41 do
    if i ≤ 41 then MatrA4[i, j] := MnewPL[i, j] elif 2·41 ≥ i > 41 then MatrA4[i, j] := MnewML[i - 41, j]
      elif 41·2 + (41 - 1) ≥ i > 2·41 then MatrA4[i, j] := MatrB[i - 2·41, j] elif i > 41·2 + (41 - 1)
        then MatrA4[i, j] := MatrBdop[i - (41·2 + (41 - 1)), j] end if end do end do;
Vect4 := Vector(2·41 + (41 - 1) + (41 - 2)) :
for i from 1 to 2·41 do
  if i ≤ 41 then Vect4[i] := MnewPR[i] elif i > 41 then Vect4[i] := MnewMR[i - 41] end if end do;

```

Формируется целевая функция

Решение оптимизационной задачи симплекс-методом:

```

c := Vector(41, 1) :
b := Vect2 :
A := MatrA2;
LPSolve(c, [A, b], assume = nonnegative)

```

Решение оптимизационной задачи методом квадратичной интерполяции:

```

H := Matrix(41, 41) :
for i from 1 to 41 do
  for j from 1 to 41 do
    if i = j then H[i, j] := 2 elif i ≠ j then H[i, j] := 0 end if end do end do;

```

```

Resh21Evkl := QPSolve(H, [A, b], assume = nonnegative)

```

```

QPSolve(H, [A, b], assume = nonnegative)

```

Решение оптимизационной задачи методом сопряженных градиент:

```

evalf(Sum('u[t]3', t = 1..41)) : p := proc (u) add('u[t]3', t = 1..41) end proc;
lc := [A, b]; NLPsolve(41, p, [A, b], assume = nonnegative);

```

Из табл. 5 и 6 видно, что метод поточечной невязки с априорными условиями неотрицательности, монотонности и выпуклости для норм

$$\|\mathbf{u}\|_l = \left(\sum_{j=1}^n |u_j|^k \right)^{1/k} \quad \text{при } k=1, 2, 3, 6 \quad (23)$$

даёт достаточно хорошо приближения, лучше получаются результаты, если в (23) взять $k \geq 3$. Если же использовать только условие неотрицательности **искомого решения**, то сходимость метода поточечной невязки медленнее, а для случая $\|\cdot\|_l = \|\cdot\|_1$ и использования симплекс-метода для решения задачи (21) процесс сходимости нестабилен. Хотя во всех случаях и для всех указанных норм невязки одного порядка.

Таблица 5

Метод поточечной невязки для решения интегрального уравнения Фредгольма I рода на классе неотрицательных функций

Погрешность, невязка	k					
	1	2	3	4	5	6
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\ _1$	28.3	28.28	30.730	29.8527	28.43555	31.487009
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\ _2$	2.9	1.72	1.517	1.4663	1.46029	1.460577
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\ _3$	1.7	0.99	0.544	0.4784	0.47227	0.470788
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\ _6$	1.0	0.69	0.294	0.2313	0.38314	0.125339
$\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{f}}\ _1$	15.3	2.57	0.358	0.0362	0.00382	0.000366
$\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{f}}\ _2$	2.7	0.30	0.056	0.0058	0.00061	0.000063
$\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{f}}\ _3$	1.6	0.19	0.033	0.0031	0.00029	0.000037
$\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{f}}\ _6$	0.9	0.13	0.021	0.0019	0.00020	0.000021

Таблица 6

Метод поточечной невязки для решения интегрального уравнения Фредгольма I рода на классе неотрицательных, монотонных и выпуклых функций

Погрешность, невязка	k					
	1	2	3	4	5	6
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\ _1$	14.8	3.87	1.200	1.1085	1.07635	0.533931
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\ _2$	2.8	1.12	0.527	0.1851	0.04483	0.015261
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\ _3$	1.7	0.88	0.291	0.0411	0.02543	0.016688
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\ _6$	1.0	0.68	0.205	0.08909	0.03801	0.029991
$\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{f}}\ _1$	16.3	2.97	0.411	0.0424	0.00316	0.0004005
$\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{f}}\ _2$	2.7	0.33	0.063	0.0064	0.00068	0.000070
$\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{f}}\ _3$	1.6	0.20	0.035	0.0034	0.00035	0.000036
$\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{f}}\ _6$	0.9	0.14	0.021	0.0021	0.00022	0.000021

Далее на рис. 7–10 представлены графики точного решения интегрального уравнения Фредгольма I рода и приближенного решения с условием только неотрицательность искомого решения (задача (19)) и с условиями неотрицательности, монотонности и выпуклости (задача (20)) искомого решения при различных нормах.

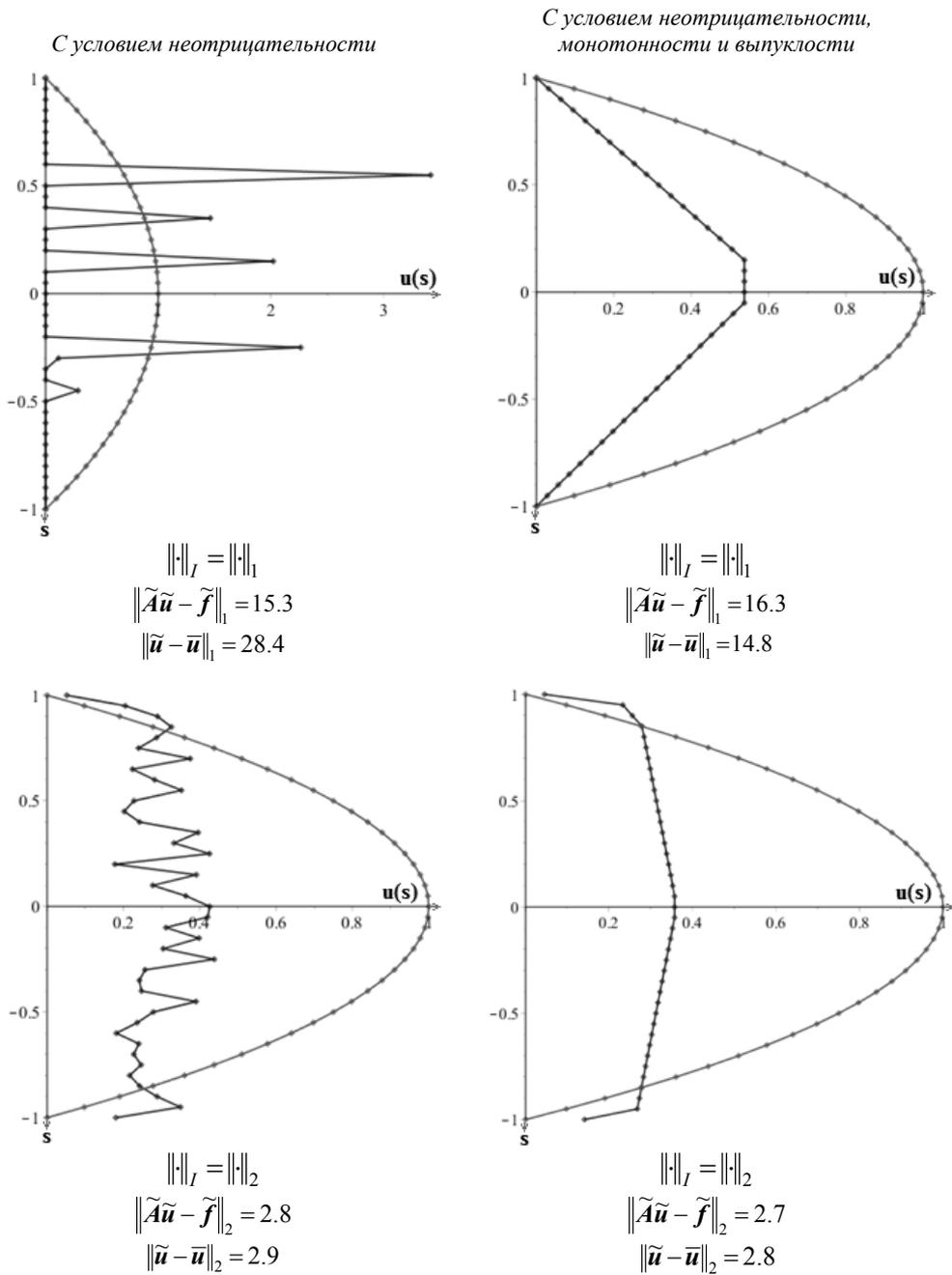
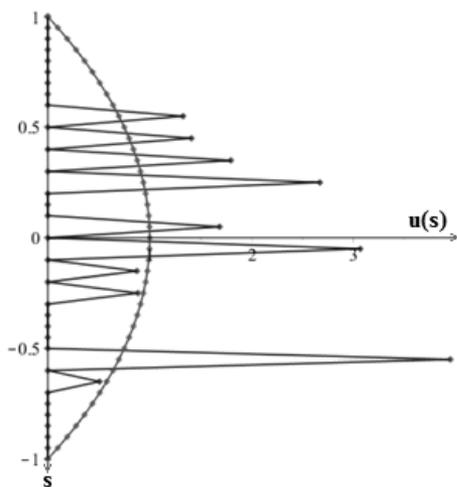


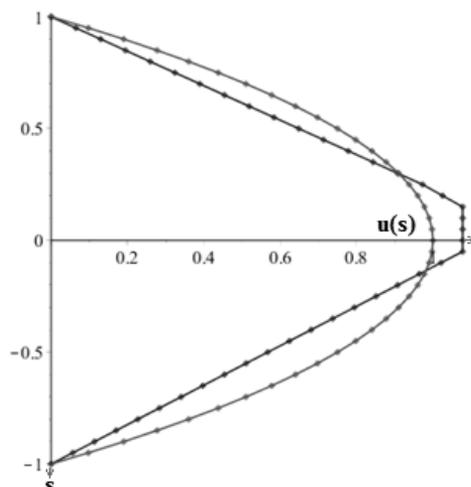
Рис. 7. Решение задачи (19) и (20)
 при $L = E, \Delta_{ij} = |\xi_{ij}| \cdot 10^{-1}, \delta_j = |\eta_j| \cdot 10^{-1}$.



$$\|\cdot\|_I = \|\cdot\|_1$$

$$\|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_1 = 2.57$$

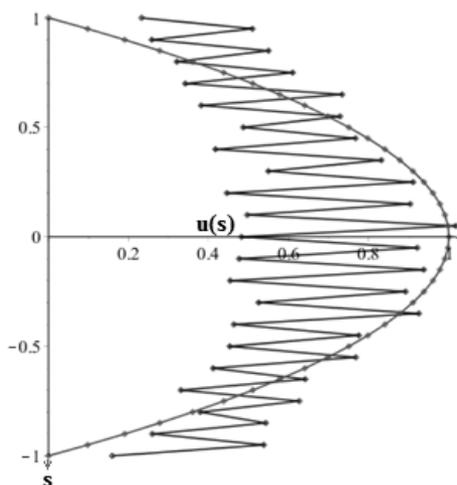
$$\|\tilde{u} - \bar{u}\|_1 = 28.29$$



$$\|\cdot\|_I = \|\cdot\|_1$$

$$\|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_1 = 2.97$$

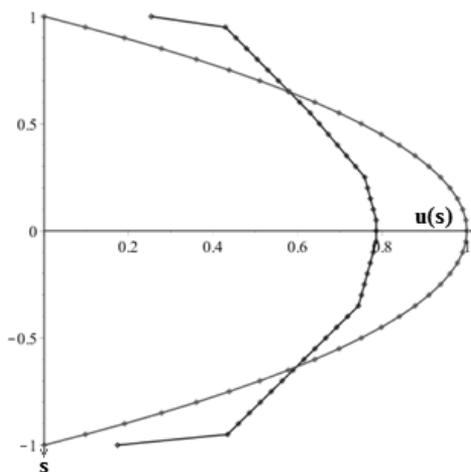
$$\|\tilde{u} - \bar{u}\|_1 = 3.87$$



$$\|\cdot\|_I = \|\cdot\|_2$$

$$\|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_2 = 0.3$$

$$\|\tilde{u} - \bar{u}\|_2 = 1.72$$

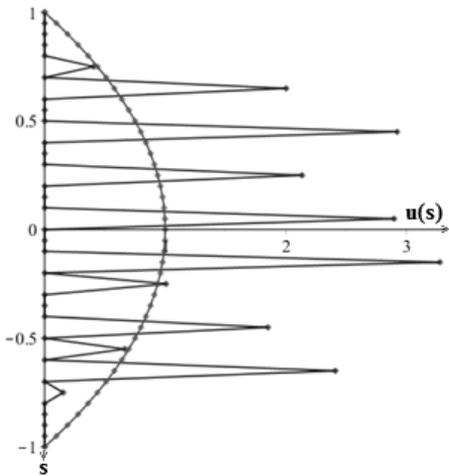


$$\|\cdot\|_I = \|\cdot\|_2$$

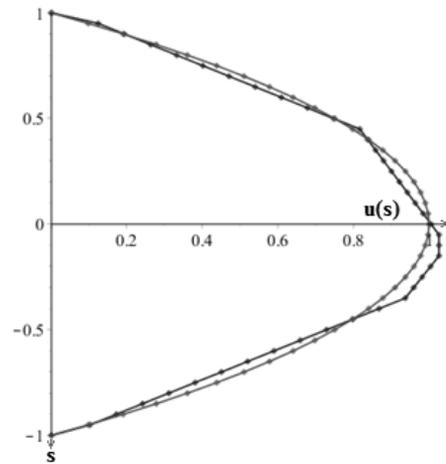
$$\|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_2 = 0.33$$

$$\|\tilde{u} - \bar{u}\|_2 = 1.12$$

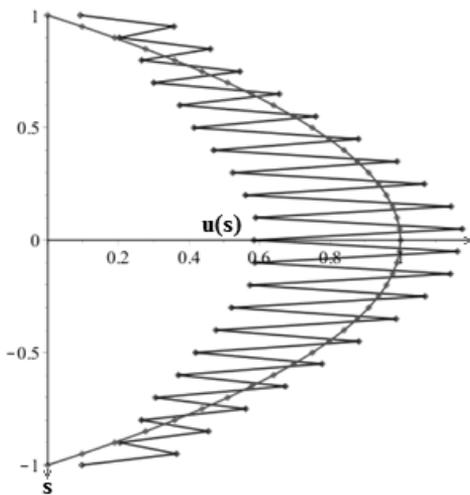
Рис. 8. Решение задачи (19) и (20)
при $L = E, \Delta_{ij} = |\xi_{ij}| \cdot 10^{-2}, \delta_j = |\eta_j| \cdot 10^{-2}$.



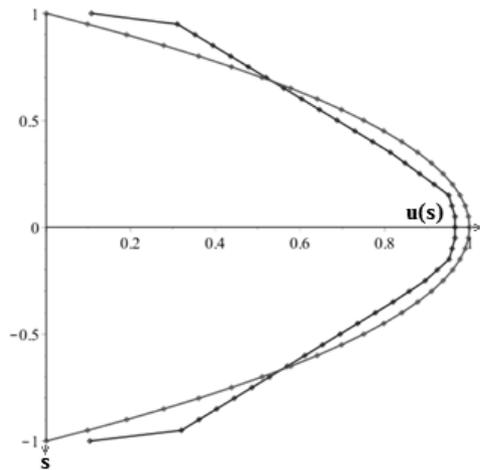
$$\begin{aligned} \|\cdot\|_I &= \|\cdot\|_1 \\ \|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_1 &= 0.358 \\ \|\tilde{u} - \bar{u}\|_1 &= 30.73 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \|\cdot\|_I &= \|\cdot\|_1 \\ \|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_1 &= 0.411 \\ \|\tilde{u} - \bar{u}\|_1 &= 1.2 \end{aligned}$$

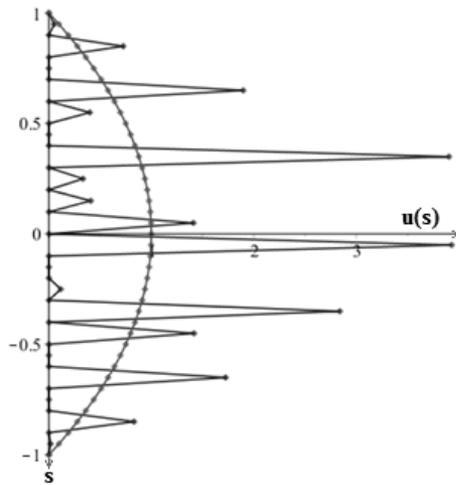


$$\begin{aligned} \|\cdot\|_I &= \|\cdot\|_2 \\ \|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_2 &= 0.056 \\ \|\tilde{u} - \bar{u}\|_2 &= 1.517 \end{aligned}$$

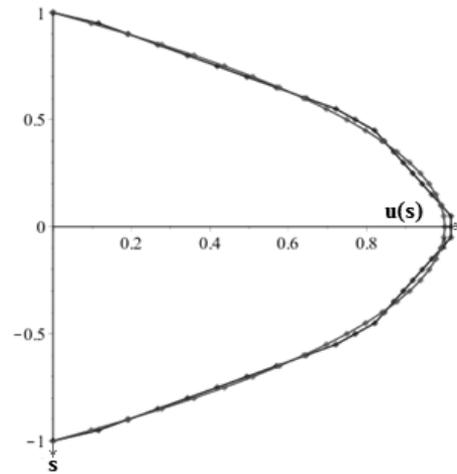


$$\begin{aligned} \|\cdot\|_I &= \|\cdot\|_2 \\ \|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_2 &= 0.062 \\ \|\tilde{u} - \bar{u}\|_2 &= 0.527 \end{aligned}$$

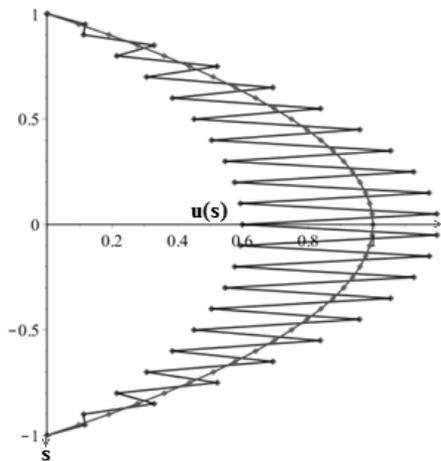
Рис. 9. Решение задачи (19) и (20)
при $L = E, \Delta_{ij} = |\xi_{ij}| \cdot 10^{-3}, \delta_j = |\eta_j| \cdot 10^{-3}$



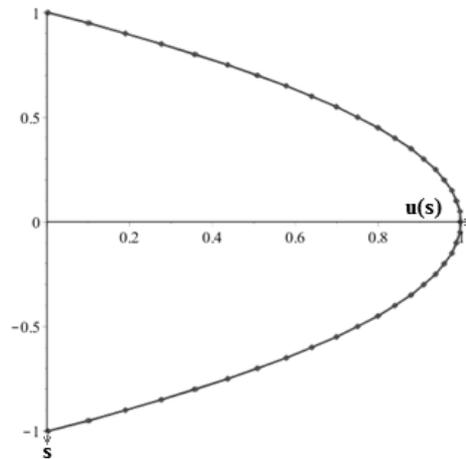
$$\begin{aligned} \|\cdot\|_I &= \|\cdot\|_1 \\ \|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_1 &= 0.000366 \\ \|\tilde{u} - \bar{u}\|_1 &= 31.487009 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \|\cdot\|_I &= \|\cdot\|_1 \\ \|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_1 &= 0.000401 \\ \|\tilde{u} - \bar{u}\|_1 &= 0.533931 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \|\cdot\|_I &= \|\cdot\|_2 \\ \|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_2 &= 0.000063 \\ \|\tilde{u} - \bar{u}\|_2 &= 1.460577 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \|\cdot\|_I &= \|\cdot\|_2 \\ \|\tilde{A}\tilde{u} - \tilde{f}\|_2 &= 0.00007 \\ \|\tilde{u} - \bar{u}\|_2 &= 0.015261 \end{aligned}$$

Рис. 10. Решение задачи (19) и (20)
при $L = E, \Delta_{ij} = |\xi_{ij}| \cdot 10^{-6}, \delta_j = |\eta_j| \cdot 10^{-6}$.

Таким образом, анализ результатов расчётов показывает, что учёт дополнительной информации позволяет получать вполне удовлетворительные приближённые решения.

Литература

1. Алексеев Б.В., Иванецкий А.Ю. О реализующей системе // Численный анализ: методы, алгоритмы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 135–143.
2. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 415 с.
3. Васильев Ф.П., Иванецкий А.Ю., Морозов В.А. Метод поточечной невязки для некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 7. С. 1140–1152.
4. Иванецкий А.Ю. Устойчивые методы решения систем линейных уравнений и неравенств с интервальными коэффициентами: дис. ... канд. физ.-матем. наук. М., 1988. 133 с.
5. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач. М.: URSS, 2009. 326 с.
6. Морозов В.А., Гребенников А.И. Методы решения некорректно поставленных задач. Алгоритмический аспект. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.
7. Морозов В.А., Медведев Н.В., Иванецкий А.Ю. Регуляризация задач алгебры и анализа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 80 с.
8. Тихонов А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980, Т. 20, № 6, С. 1373–1383.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 284 с.
10. Vasilyev F.P., Ivanitskiy A.Yu. In-Depth Analyses of Linear Programming. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2001, 312 p.

ИВАНИЦКИЙ АЛЕКСАНДР ЮРЬЕВИЧ – кандидат физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной математики, физики и информационных технологий, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (ivanitskiy@hotmail.com).

УРУСОВ АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ – бакалавр кафедры прикладной математики и информатики, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (tapwi93@gmail.com).

A. IVANITSKIY, A. URUSOV

THE NUMERICAL ANALYSES OF THE POINTWISE RESIDUAL METHOD

Key words: *ill-posed problem, system of linear algebraic equations and inequalities with approximate data, type 1 Fredholm integral equations, ill-posed electrotechnical problems.*

In the article the pointwise residual method for numerical solving ill-posed systems of linear algebraic equations and inequalities with approximate data given in interval form, type 1 Fredholm integral equations for class of non-negative unknown functions is considered. The effective algorithm and software product for numerical solving some ill-posed electrotechnical problems that can be reduced to above mentioned problems are proposed.

References

1. Alekseyev B.V., Ivanitskiy A.Yu. *O realizu'ushchey sisteme* [About a realizing system]. In: *Chislennyi analiz: metody, algoritmy i prilozheniya* [Numerical analyses: methods, algorithms and applications]. Moscow, Moscow University Publ., 1985, pp. 135–143.
2. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Methods for Optimizations]. Moscow, Faktorial Press Publ., 2002, 415 p.
3. Vasil'ev F.P., Ivanitskiy A.Yu., Morozov V.A. *Metod potochechnoi nevyazki dlya nekotorykh zadach lineinoi algebrы i lineinogo programmirovaniya* [Pointwise Residual Method for Solving Some Problems of Linear Algebra and Linear Programming]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1998, vol. 38, no. 7, pp. 1140–1152.
4. Ivanitskiy A.Yu. *Ustoichivye metody resheniya sistem lineynykh uravneniy i neravenstv s interval'nymi koeffitsi'entami: dis. ... kand. fiz.-matem. nauk* [Stable methods for solving systems of linear equations and inequalities with interval coefficients. Doct. Diss.]. Moscow, Moscow University Publ., 1988, 133 p.
5. Leonov A.S. *Resheniye nekorrektno postavlennykh obratnykh zadach* [Solving of Ill-Posed Inverse Problems]. Moscow, URSS Publ., 2009, 326 p.

6. Morozov V.A., Grebennikov A.I. *Metody resheniya nekorrektno postavlennyykh zadach. Algoritmicheskiy aspekt* [Methods for solving ill-posed problems. Algorithmic aspect]. Moscow, Moscow University Publ., 1992.

7. Morozov V.A., Medvedev N.V., Ivanitskiy A.Yu. *Regulyarizatsiya zadach algebry i analiza* [Regularization of Algebra and Analysis Problems]. Moscow, Moscow University Publ., 1987, 80 p.

8. Tikhonov A.N. *O priblizhennykh sistemakh lineynykh algebraicheskikh uravneniy* [About approximate systems of linear algebraic equations]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1980, vol. 20, no. 6, pp. 1373–1383.

9. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnyykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 284 p.

10. Vasilyev F.P., Ivanitskiy A.Yu. *In-Depth Analyses of Linear Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2001, 312 p.

IVANITSKIY ALEXANDER – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Applied Mathematics, Physics and Information Technology, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

URUSOV ANDREY – Bachelor Student of Department of Applied Mathematics and Informatics, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

Ссылка на статью: Иванецкий А.Ю., Урусов А.М. Численный анализ метода поточечной невязки // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 127–144.

УДК 517.929.7:004
ББК В161.6-3

Е.А. МИКИШАНИНА

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Ключевые слова: обобщенное дискретное преобразование Фурье, ряды Фурье, краевая задача, блок-схема.

В настоящей работе для построенных с помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье почти-периодических в смысле Бора решений плоской краевой задачи теории фильтрации предлагается алгоритм их компьютерного моделирования в системе программирования Maple. Все решения задачи получены в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье, коэффициенты которых выражаются через заданные функции. Определены структуры искоемых механических параметров, построены графики, а также их приближения к граничным функциям.

В различных областях техники и механики часто используются многослойные конструкции. Актуальным в настоящее время является исследование устойчивости этих конструкций к разрушению под влиянием действующих на них нагрузок, например, исследование работы дорожных «одежд» [1]. Этот вопрос тесно связан с задачей определения напряжений и деформаций упругих слоистых систем, которые подвержены, например, силовому воздействию воды.

В настоящей работе рассматривается плоская краевая задача теории фильтрации для области, представляющей собой две полосы (рис. 1), когда на границах заданы напряжения в виде почти-периодических¹ по Бору функций, т.е. в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье с функциональными коэффициентами, [2, 3], а на границе раздела сред заданы условия жесткого сцепления.

Решения подобных задач, но в других классах функций, например, с помощью интегральных преобразований Фурье, представлены во многих учебных пособиях.

Построение с помощью ОДФ почти-периодических в смысле Бора решений краевой задачи для системы дифференциальных уравнений имеет ряд преимуществ: позволяет перейти от системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем к системе линейных алгебраических уравнений; процесс решения и дальнейшего компьютерного моделирования решений достаточно прост.

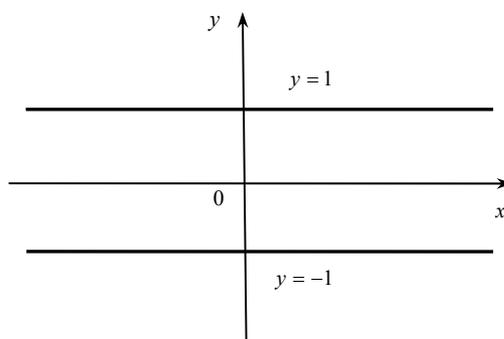


Рис.1. Двухслойная полоса

¹ Почти-периодическим (п.-п.) полиномом называется функция $p(t)$, $-\infty < t < \infty$, являющаяся линейной комбинацией функций вида $e^{i\lambda t}$, где $\lambda \in R$. Через Π_W обозначим множество, состоящее из функций $A(t)$ вида $A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$, где $\lambda_n \in R$, $a_n \in C$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

В работе предлагается алгоритм построения решений в системе программирования Maple, который проиллюстрирован на тестовом примере. Построены графики найденных напряжений и функций потенциалов скорости фильтрации внутри областей и на их границах.

Постановка задачи. Найти функции потенциала скорости фильтрации жидкости $\varphi^{(m)}(x, y)$, действующей в каждой полосе пористой области $0 \leq y \leq 1$, $-\infty < x < +\infty$, ($m = 1$), $-1 \leq y \leq 0$, $-\infty < x < +\infty$, ($m = 2$), а также нормальные и касательные напряжения $\sigma_x^{(m)}(x, y)$, $\sigma_y^{(m)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(m)}(x, y)$, удовлетворяющие системе восьми дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_x^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x^{(m)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y^{(m)}}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_x^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(m)}}{\partial y} + \frac{\gamma^{(m)}}{k_m} \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(m)}}{\partial y} + \frac{\gamma^{(m)}}{k_m} \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial y} - \gamma_0^{(m)} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(m)}}{\partial y^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где k_m – коэффициенты фильтрации сред; $\gamma^{(m)}$, $\gamma_0^{(m)}$ – объемные веса жидкости и пористых тел с заключенной в них водой; $m = 1, 2$ [4].

На внешних границах сплошной среды $y=1$, $y=-1$ известны значения нормального и касательного напряжений, а также значения потенциала скорости фильтрации:

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}_y(x, -1) &= F_1(x), & \sigma^{(2)}_y(x, 1) &= G_1(x), \\ \tau^{(1)}_{xy}(x, -1) &= F_2(x), & \tau^{(2)}_{xy}(x, 1) &= G_2(x), \\ \varphi^{(1)}(x, -1) &= F_3(x), & \varphi^{(2)}(x, 1) &= G_3(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где функции $F_j, G_j \in \Pi_W, j=1, 2, 3$, т.е. имеют структуру $F_j(x) = \sum_{\lambda \neq 0} f_j(\lambda) e^{i\lambda x}$,

$G_j(x) = \sum_{\lambda \neq 0} g_j(\lambda) e^{i\lambda x}$, $\{\lambda\}$ – счетное множество действительных чисел, которое отделено от нуля.

На общей границе раздела сред $y=0$ имеют место условия жесткого сцепления:

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}_y(x, 0) &= \sigma^{(2)}_y(x, 0), & \tau^{(1)}_{xy}(x, 0) &= \tau^{(2)}_{xy}(x, 0), \\ u^{(1)}(x, 0) &= u^{(2)}(x, 0), & v^{(1)}(x, 0) &= v^{(2)}(x, 0), \\ \frac{\varphi^{(1)}(x, 0)}{k_1} &= \frac{\varphi^{(2)}(x, 0)}{k_2}, & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y}(x, 0) &= \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial y}(x, 0), \end{aligned} \quad (3)$$

где k_1, k_2 – коэффициенты фильтрации сред. Функции $u^{(m)}(x, y)$, $v^{(m)}(x, y)$ – функции смещений, связанные с напряжениями формулами

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x} = \frac{1}{E_m} (\sigma_x^{(m)} - \nu_m \sigma_y^{(m)}), \\ \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} = \frac{1}{E_m} (\sigma_y^{(m)} - \nu_m \sigma_x^{(m)}), \\ \frac{\partial u^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} = \frac{2(1 + \nu_m)}{E_m} \tau_{xy}^{(m)}, \end{cases}$$

где E_m, ν_m – коэффициенты упругости и Пуассона, заданные для каждого слоя $m = 1, 2$.

Решение. Пусть решения представимы в виде рядов

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(m)}(x, y) &= \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{(m)}(y) e^{i\lambda x}, & \sigma_y^{(m)}(x, y) &= \sum_{\lambda} B_{\lambda}^{(m)}(y) e^{i\lambda x}, \\ \tau_{xy}^{(m)}(x, y) &= \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{(m)}(y) e^{i\lambda x}, & \varphi^{(m)}(x, y) &= \sum_{\lambda} D_{\lambda}^{(m)}(y) e^{i\lambda x},\end{aligned}\quad (4)$$

т.е. $\sigma_x^{(m)}(x, y), \sigma_y^{(m)}(x, y), \tau_{xy}^{(m)}(x, y), \varphi^{(m)}(x, y) \in \Pi_W^y$ ($-1 \leq y \leq 1$).

Поддействуем оператором W_0^{-1} на уравнения системы (1) и, учитывая его свойства, приходим к следующим уравнениям:

$$\left\{ \begin{aligned} -\lambda^2 A_{\lambda}^{(m)}(y) + \frac{d^2 A_{\lambda}^{(m)}(y)}{dy^2} - \lambda^2 B_{\lambda}^{(m)}(y) + \frac{d^2 B_{\lambda}^{(m)}(y)}{dy^2} &= 0, \\ i\lambda A_{\lambda}^{(m)}(y) + \frac{dC_{\lambda}^{(m)}(y)}{dy} + i\lambda \frac{\gamma^{(m)}}{k_m} D_{\lambda}^{(m)}(y) &= 0, \\ i\lambda C_{\lambda}^{(m)}(y) + \frac{dB_{\lambda}^{(m)}(y)}{dy} + \frac{\gamma^{(m)}}{k_m} \cdot \frac{D_{\lambda}^{(m)}(y)}{dy} - \gamma_0^{(m)} &= 0, \\ -\lambda^2 D_{\lambda}^{(m)}(y) + \frac{d^2 D_{\lambda}^{(m)}(y)}{dy^2} &= 0, \quad m=1,2. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Решая систему дифференциальных уравнений (5), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\lambda}^{(m)}(y) &= \left(-b_1^{(m)}(\lambda) - \frac{2}{\lambda} b_3^{(m)}(\lambda) - b_3^{(m)}(\lambda)y - 2 \frac{\gamma^{(m)}}{k_m} d_1^{(m)}(\lambda) \right) e^{\lambda y} + \\ &+ \left(-b_2^{(m)}(\lambda) + \frac{2}{\lambda} b_4^{(m)}(\lambda) - b_4^{(m)}(\lambda)y - 2 \frac{\gamma^{(m)}}{k_m} d_2^{(m)}(\lambda) \right) e^{-\lambda y}, \\ B_{\lambda}^{(m)}(y) &= (b_1^{(m)}(\lambda) + b_3^{(m)}(\lambda)y) e^{\lambda y} + (b_2^{(m)}(\lambda) + b_4^{(m)}(\lambda)y) e^{-\lambda y}, \\ C_{\lambda}^{(m)}(y) &= -\frac{i\gamma_0^{(m)}}{\lambda} + i(b_1^{(m)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(m)}(\lambda) + b_3^{(m)}(\lambda)y + \frac{\gamma^{(m)}}{k_m} d_1^{(m)}(\lambda)) e^{\lambda y} + \\ &+ i(-b_2^{(m)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(m)}(\lambda) - b_4^{(m)}(\lambda)y - \frac{\gamma^{(m)}}{k_m} d_2^{(m)}(\lambda)) e^{-\lambda y}, \\ D_{\lambda}^{(m)}(y) &= d_1^{(m)}(\lambda) e^{\lambda y} + d_2^{(m)}(\lambda) e^{-\lambda y}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Коэффициенты $b_1^{(m)}(\lambda), b_2^{(m)}(\lambda), b_3^{(m)}(\lambda), b_4^{(m)}(\lambda), d_1^{(m)}(\lambda), d_2^{(m)}(\lambda)$ ($m = 1, 2$) находятся из системы линейных алгебраических уравнений, которая является следствием граничных условий и условий сцепления, т.е. из системы

¹ Показано, что если функция $A(t, y)$ дифференцируема по y p раз и $\frac{\partial^j A(t, y)}{\partial y^j} \in \Pi_W^y, j=0, \dots, p$, то

$$W_0^{-1} \frac{\partial^p A(t, y)}{\partial y^p} = \frac{\partial^p a(\lambda, y)}{\partial y^p}, \text{ где } A(t, y) \in \Pi_W^y \text{ (множество п.-п. функций).}$$

$$\begin{cases}
e^{-\lambda} b_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda} b_2^{(1)}(\lambda) - e^{-\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) = f_1(\lambda), \\
e^{-\lambda} b_1^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda} b_2^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) e^{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) + e^{-\lambda} \frac{\gamma^{(1)}}{k_1} d_1^{(1)}(\lambda) - e^{\lambda} \frac{\gamma^{(2)}}{k_2} d_2^{(1)}(\lambda) = -if_2(\lambda) + \frac{\gamma_0^{(1)}}{\lambda}, \\
e^{-\lambda} d_1^{(1)}(\lambda) + e^{\lambda} d_2^{(1)}(\lambda) = f_3(\lambda), \\
e^{\lambda} b_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} b_2^{(2)}(\lambda) + e^{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) = g_1(\lambda), \\
e^{\lambda} b_1^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda} b_2^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) e^{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) + e^{\lambda} \frac{\gamma^{(2)}}{k_2} d_1^{(2)}(\lambda) - e^{-\lambda} \frac{\gamma^{(1)}}{k_2} d_2^{(2)}(\lambda) = \\
= -ig_2(\lambda) + \frac{\gamma_0^{(2)}}{\lambda}, \\
e^{\lambda} d_1^{(2)}(\lambda) + e^{-\lambda} d_2^{(2)}(\lambda) = g_3(\lambda), \\
b_1^{(1)}(\lambda) + b_2^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) - b_2^{(2)}(\lambda) = 0, \\
b_1^{(1)}(\lambda) - b_2^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_3^{(1)}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} b_4^{(1)}(\lambda) + \frac{\gamma^{(1)}}{k_1} d_1^{(1)}(\lambda) - \frac{\gamma^{(1)}}{k_1} d_2^{(1)}(\lambda) - b_1^{(2)}(\lambda) + b_2^{(2)}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} b_3^{(2)}(\lambda) - \\
- \frac{1}{\lambda} b_4^{(2)}(\lambda) - \frac{\gamma^{(2)}}{k_2} d_1^{(2)}(\lambda) + \frac{\gamma^{(2)}}{k_2} d_2^{(2)}(\lambda) = \frac{\gamma_0^{(1)}}{\lambda} - \frac{\gamma_0^{(2)}}{\lambda}, \\
k_2 d_1^{(1)}(\lambda) + k_2 d_2^{(1)}(\lambda) - k_1 d_1^{(2)}(\lambda) - k_1 d_2^{(2)}(\lambda) = 0, \\
d_1^{(1)}(\lambda) - d_2^{(1)}(\lambda) - d_1^{(2)}(\lambda) + d_2^{(2)}(\lambda) = 0, \\
\frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_1^{(1)} + \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_2^{(1)} + \frac{2}{E_1} b_3^{(1)} - \frac{2}{E_1} b_4^{(1)} + \frac{2\lambda}{E_1 k_1} \gamma^{(1)} d_1^{(1)} + \frac{2\lambda}{E_1 k_1} \gamma^{(1)} d_2^{(1)} - \\
- \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_1^{(2)} - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_2^{(2)} - \frac{2}{E_2} b_3^{(2)} + \frac{2}{E_2} b_4^{(2)} - \frac{2\lambda}{E_2 k_2} \gamma^{(2)} d_1^{(2)} - \frac{2\lambda}{E_2 k_2} \gamma^{(2)} d_2^{(2)} = 0, \\
\frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_1^{(1)} - \frac{\lambda(1+\nu_1)}{E_1} b_2^{(1)} + \frac{(\nu_1-1)}{E_1} b_3^{(1)} + \frac{(\nu_1-1)}{E_1} b_4^{(1)} + \frac{2\lambda\nu_1}{E_1 k_1} \gamma^{(1)} d_1^{(1)} - \frac{2\lambda\nu_1}{E_1 k_1} \gamma^{(1)} d_2^{(1)} - \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_1^{(2)} + \\
+ \frac{\lambda(1+\nu_2)}{E_2} b_2^{(2)} - \frac{(\nu_2-1)}{E_2} b_3^{(2)} - \frac{(\nu_2-1)}{E_2} b_4^{(2)} - \frac{2\lambda\nu_2}{E_2 k_2} \gamma^{(2)} d_1^{(2)} + \frac{2\lambda\nu_2}{E_2 k_2} \gamma^{(2)} d_2^{(2)} = \frac{2\gamma_0^{(1)}(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{2\gamma_0^{(2)}(1+\nu_2)}{E_2}.
\end{cases} \quad (7)$$

Система (7) имеет решение, причем единственное, при любом λ из заданного множества.

Вычислительный алгоритм модельной задачи. Рассмотрим случай бетонных листов с заданными различными характеристиками: коэффициентами упругости $E_1 = 0,15 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 0,18 \cdot 10^5$ МПа, коэффициентами Пуассона $\nu_1 = 0,16$, $\nu_2 = 0,2$, коэффициентами фильтрации $k_1 = 0,6$ Д, $k_2 = 0,08$ Д, объемными весами воды и пористых тел с заключенной в них водой $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = 9,8$ кг/(м²с²), $\gamma_0^{(1)} = \gamma_0^{(2)} = 10$ кг/(м²с²). Краевые условия на внешних границах гетерогенных сред имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(1)}(x, -1) &= F_1(x) = -3 \cos(x) + \sin(x) = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) e^{ix} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) e^{-ix}, \\
\tau_{xy}^{(1)}(x, -1) &= F_2(x) = 2 \cos(x) + 2 \sin(x) = (1-i) e^{ix} + (1+i) e^{-ix}, \\
\varphi^{(1)}(x, -1) &= F_3(x) = -3 \cos(x) + 4 \sin(x) = \left(-\frac{3}{2} - 2i\right) e^{ix} + \left(-\frac{3}{2} + 2i\right) e^{-ix}, \\
\sigma_y^{(2)}(x, 1) &= G_1(x) = \cos(x) + \sin(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) e^{ix} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) e^{-ix}, \\
\tau_{xy}^{(2)}(x, 1) &= G_2(x) = 2 \cos(x) - \sin(x) = \left(1 + \frac{1}{2}i\right) e^{ix} + \left(1 - \frac{1}{2}i\right) e^{-ix}, \\
\varphi^{(2)}(x, 1) &= G_3(x) = \cos(x) + 2 \sin(x) = \left(\frac{1}{2} - i\right) e^{ix} + \left(\frac{1}{2} + i\right) e^{-ix}.
\end{aligned}$$

Алгоритм компьютерного моделирования решения краевой задачи можно изобразить в виде блок-схемы (рис. 2), где $m = 1, 2$ – номер слоя.

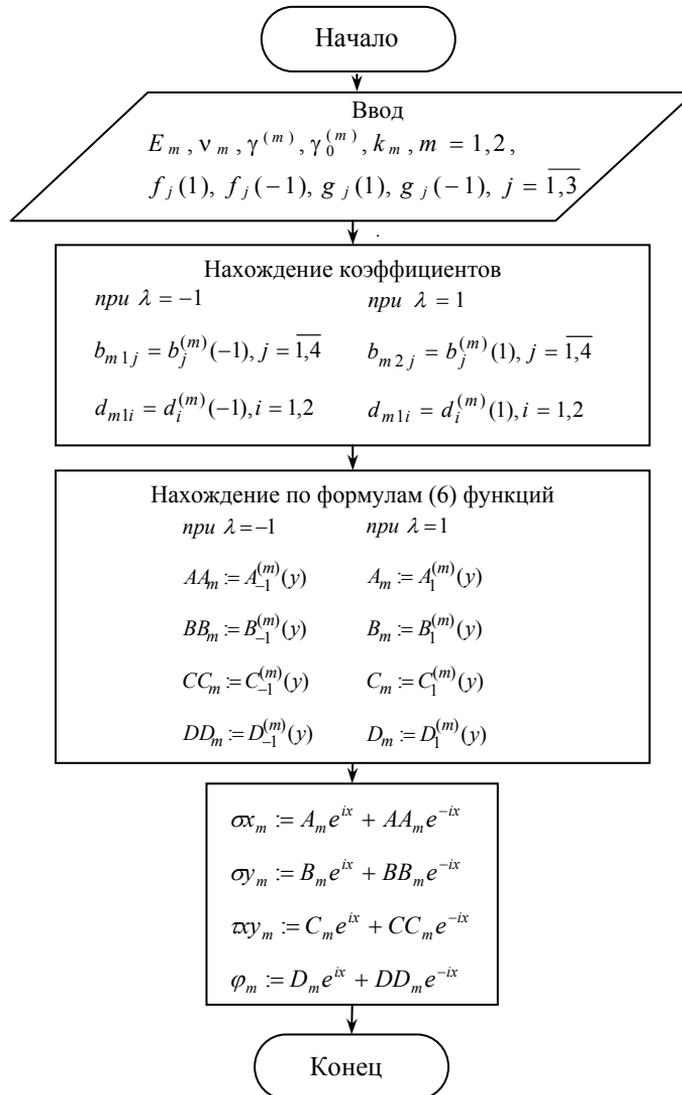
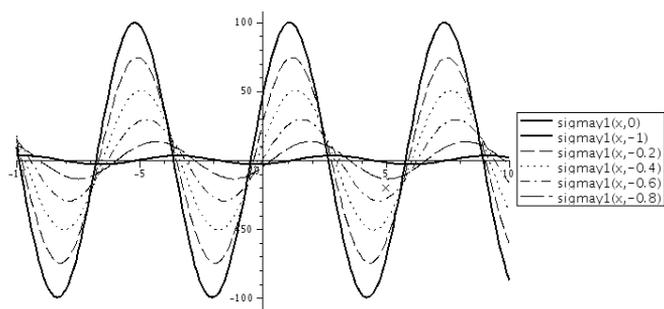


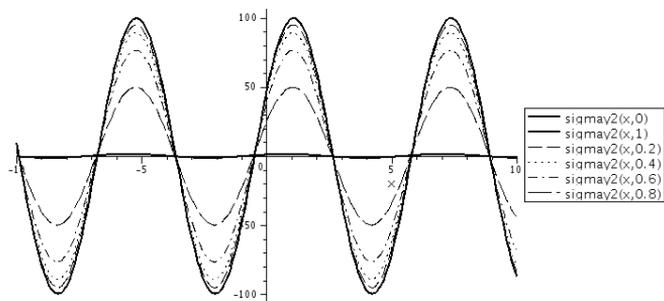
Рис. 2. Блок-схема алгоритма

Расчеты выполнялись в программной среде Maple. Для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений использовалась функция *dsolve*, для решения систем линейных алгебраических уравнений – функция *solve*. После выполнения расчетов система представляет возможность вывода результатов в виде графиков.

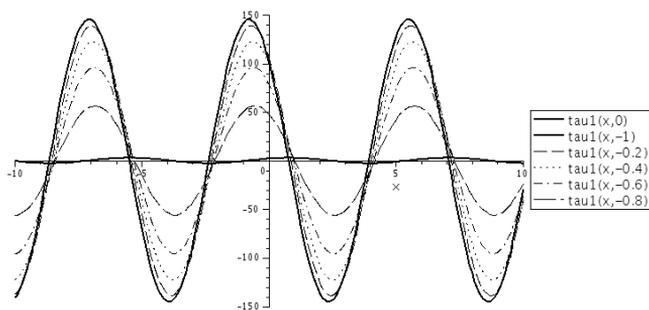
Для данного тестового примера функции напряжений и потенциалов скоростей фильтрации внутри полос и на границах изображены на рис. 3, а, б, 4, а, б и 5, а, б.



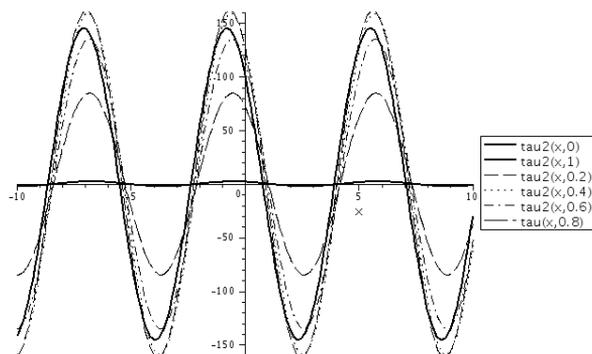
а



б

Рис. 3. Функции напряжения: а – $\sigma_y^{(1)}(x, y)$; б – $\sigma_y^{(2)}(x, y)$ 

а



б

Рис. 4. Функции напряжения: а – $\tau_{xy}^{(1)}(x, y)$; б – $\tau_{xy}^{(2)}(x, y)$

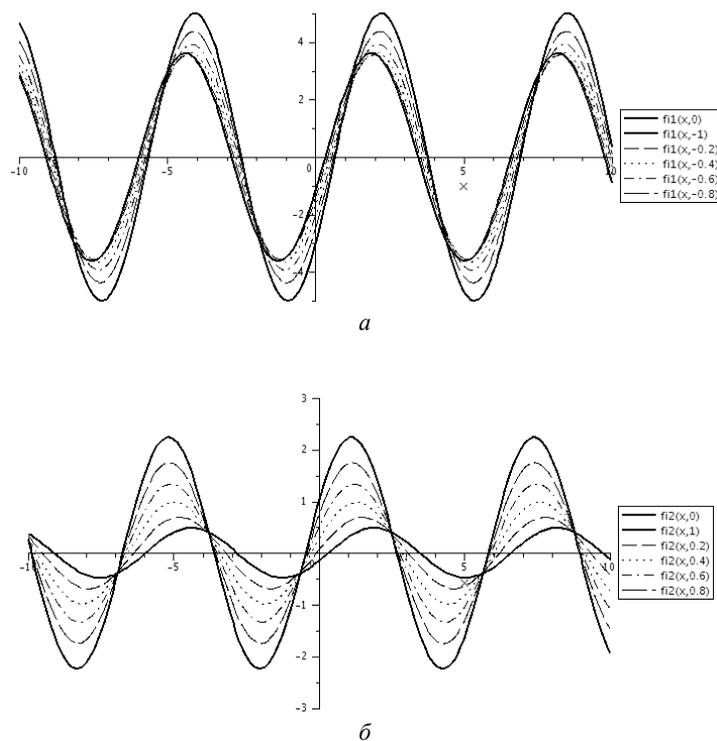


Рис. 5. Функции потенциала скорости фильтрации:
 $a - \varphi^{(1)}(x, y)$; $b - \varphi^{(2)}(x, y)$

Выводы. Получена структура искомых напряжений и потенциалов скорости фильтрации, а также решения для конкретной задачи, построены с использованием программы Maple графики искомых механических параметров и их приближения к граничным функциям.

Рассмотренный метод может быть реализован для решения задач теории гетерогенных сред, теории упругости, теории фильтрации, теории диффузии, теплопроводности, электро- и магнитодинамики.

Литература

1. Иванов Н.Н. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд. М.: Транспорт, 1973. 328 с.
2. Кулагина М.Ф. Построение почти-периодических решений некоторых краевых задач математической физики // Сборник трудов Российской ассоциации «Женщины-математики». Воронеж, 1995. Вып. 3. С. 68–73.
3. Кулагина М.Ф. Обобщенное дискретное преобразование Фурье и его приложения // Сборник научных статей Российской ассоциации «Женщины-математики». Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1993. Вып. 1. С. 79–83.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

МИКИШАНИНА ЕВГЕНИЯ АРИФЖАНОВНА – старший преподаватель кафедры актуарной и финансовой математики, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (evaeva_84@mail.ru).

E. MIKISHANINA

**COMPUTER SIMULATION OF PLANAR SOLUTIONS
OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF FILTRATION THEORY**

Key words: *generalized discrete Fourier transform, Fourier series, boundary value problem, block diagram.*

In this work we built with the help of generalized discrete Fourier transforms almost-periodic in the Bohr sense of the flat solutions of the boundary value problem of the theory of filtration offers the algorithm of computer simulation in the programming system Maple. All solutions of the problem obtained in the form of absolutely converging Fourier series whose coefficients are expressed through the given functions. Structures of required mechanical parameters are defined, schedules, and also their approximations to boundary functions are constructed.

References

1. Ivanov N.N. *Konstruirovaniye i raschet nezhestkikh dorozhnykh odezhd* [Design and calculation of non-rigid pavements]. Moscow, Transport Publ., 1973, 328 p.
2. Kulagina M.F. *Construction of almost periodic solutions to some boundary value problems of mathematical physics* [Postroeniye pochti-periodicheskikh reshenii nekotorykh kraevykh zadach matematicheskoi fiziki]. *Sbornik trudov Rossiiskoi assotsiatsii «Zhenshchiny-matematiki»*. Vypusk 3 [Proc. of the Rus. Association «Women-mathematicians». Issue 3]. Voronezh, 1995, pp. 68–73.
3. Kulagina M.F. *Obobshchennoe diskretnoe preobrazovaniye Fur'e i ego prilozheniya* [Generalized discrete Fourier transform and its applications]. *Sbornik nauchnykh statei Rossiiskoi assotsiatsii «Zhenshchiny-matematiki»*. Vypusk 1 [Proc. of the Rus. Association «Women-mathematicians». Issue 1]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod University publ., 1993, pp. 79–83.
4. Polubarinova-Kochina P.Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* [The theory of motion of ground water]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 664 p.

MIKISHANINA EVGENIA – Senior Lecturer, Department of Actuarial and Financial Mathematics, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

Ссылка на статью: Микишанина Е.А. Компьютерное моделирование решений плоской краевой задачи теории фильтрации // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 145–152.

УДК [517.912:519.6]:004

ББК В161.6:В192.1

Н.В. НОВОЖИЛОВА, В.Х. ФЕДОТОВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Ключевые слова: математическое моделирование, динамические процессы, численные методы, компьютерные вычисления, приближенные вычисления, методы системы MatLab, разработка нового математического метода моделирования, технические системы, динамика сложных систем, численное исследование, методики численных расчетов, вычислительные аспекты проблемы окрестностей особых точек, уточнение решений в окрестностях сингулярных точек, сингулярные модели.

Динамика сложных систем (физических, биологических и др.) описывается дифференциальными уравнениями. При численном исследовании их решений в окрестностях особых точек возникает проблема корректного продолжения – точного попадания на ту же линию семейства интегральных кривых, которая была до прохождения особой точки. Целью работы являются построение и апробация методик численных расчетов в окрестностях особых точек, позволяющих находить корректные продолжения решений.

При моделировании динамических процессов часто используются дифференциальные уравнения с особыми, сингулярными точками. Для численного анализа таких моделей необходимы специфические приемы приближенных вычислений.

Пусть динамика сложной системы на отрезке $[a, b]$ описывается дифференциальным уравнением

$$F(y^{(p)}(t), y^{(p-1)}(t), \dots, y'(t), y(t), t) = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющим начальным условиям (задача Коши):

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = y^{(p-1)}_0, \quad (2)$$

где F – заданная функция; $y^{(p)}(t)$ – производная порядка p ; $y(t)$ – зависимая переменная; t – независимая переменная (время), t_0 – начальный момент времени.

Предположим, что:

1) на $[a, b]$ существует особая точка t^* , в которой решение $y(t)$ обращается в бесконечность (сингулярность);

2) координаты этой точки зависят от начальных условий (подвижность). Требуется вычислить точное значение частного решения системы (1), (2) в малой окрестности такой особой точки. Например, гипербола $y = 1/(t - C)$ имеет одну подвижную особую точку $t^* = C$, тангенс – множество особых точек.

Проблема состоит в том, что численное решение в окрестности такой особой точки построить обычным образом не удастся в силу теоретических ограничений (деление на нуль) и компьютерных ошибок дискретизации (машинная бесконечность). Корректно продолжить решение справа от особой точки тоже нельзя, так как из-за вычислительных ошибок нарушается итерационный процесс и теряется связь с интегральной кривой, отвечающей начальным условиям. Теоретическое исследование этой проблемы восходит к

работам Пуанкаре [5, 6] и основано на представлении решения сходящимся степенным рядом в окрестности особой точки. В [3] изложен практический подход к решению этой проблемы, доказана теорема существования решения в окрестности таких точек, приведены алгоритмы их вычисления с заданной точностью, алгоритм построения приближенных решений в их окрестности и исследовано влияние погрешности исходных данных на точность решения.

В статье исследуются вычислительные аспекты проблемы окрестностей особых точек, связанные с алгеброй приближенных вычислений, аналитическая теория которой практически отсутствует [7]. На практике это проявляется в ошибках компьютерных вычислений, вызванных различными погрешностями дискретизации, округления, устойчивости и др. Рассмотрены простые методики, позволяющие преодолеть эти погрешности и численно корректно продолжить решение в окрестности особой точки с достаточной для практических целей точностью. В основе предлагаемых методик лежит идея преобразования бесконечного в конечное, невычислимого в вычисляемое и т.д. Для этого исходная задача разбивается на несколько подзадач Коши (по числу особых точек) и выбирается подходящая замена переменных (например, бесконечная прямая может быть преобразована в конечную окружность). Затем применяются следующие приемы численного интегрирования, позволяющие избавиться от сингулярности (или сдвинуть ее за пределы отрезка интегрирования):

1) обратная замена (обращение времени) $t = -x$ сводит решение прямой задачи Коши на отрезке $[a, b]$ с начальными условиями $y(a) = y_0$ к обратной задаче Коши на отрезке $[b, a]$ с начальными условиями $y(b) = y_{\text{кон}}$;

2) деформация времени (сжатие, растяжение, искривление) $t = \varphi(x)$ или $x = \mu(t)$ сводит решение исходной задачи к новой задаче Коши на отрезке $[\mu(a), \mu(b)]$;

3) деформация пространства (сжатие, растяжение, искривление) $y = \psi(z)$ или $z = v(y)$ сводит решение исходной задачи к задаче Коши на том же отрезке времени, но в новых зависимых переменных;

4) деформация времени и пространства объединяет два предыдущих подхода;

5) инверсная замена – два симметричных преобразования Пуанкаре а) $t = 1/z, y = x/z$ и б) $t = x/z, y = 1/z$ [6. С. 216];

6) эталонная замена – хорошо исследованные эталоны простых функций с особыми точками (гипербола, тангенс и др.) можно объединить в таблицу эталонных замен (аналог таблицы производных для элементарных функций);

7) специальная замена $x = t - t_0, z = y(t, t_0, y_0) - y_0$ сводит задачу Коши $y'_t = f(x, y)$ к исследованию зависимости от параметров правой части уравнения $z'_x = f(x+t_0, z+y_0)$.

Предположим, не нарушая общности, что на отрезке интегрирования существует только одна особая точка. Рассмотрим вначале деформацию времени, т.е. замену только одной независимой переменной t на новую переменную x , предполагая, что формула преобразования задана явно:

$$t = \varphi(x). \quad (3)$$

Тогда производные в (1) можно вычислить по правилам дифференцирования сложных функций [2]

$$y'_t = y'_x / t'_x, y''_{tt} = (t'_x y'''_{xx} - t''_{xx} y'_x) / (t'_x)^3, \dots \quad (4)$$

Находя t'_x , t''_{xx} , ... из (3) и подставляя в (4), а затем (1), получим запись исходного уравнения в новых координатах. В частном случае при линейной замене независимой переменной $\varphi(x) = -ax + b$ ($a > 0$ – скорость течения времени) получаем разновидности простых методик обратного интегрирования. Если связь (3) задана неявно $\phi(t, x) = 0$, то соответствующие производные вычисляются по правилам дифференцирования неявных функций. Если вместо (3) известна только явная зависимость новой переменной через старую $x = \mu(t)$, то можно использовать изложенную выше методику, но проще выполнить обратный переход и свести все к предыдущему случаю.

При замене одной зависимой переменной y на новую переменную z соотношения (3), (4) примут, соответственно, вид $y = \psi(z)$ и $z'_t = y'_t / y'_z$ и т.д. При замене и зависимой, и независимой переменных t и y на новые переменные x и z получим наиболее общий случай, в котором зависимые и независимая переменная могут меняться местами (симметричны):

$$t = \varphi(x, z), y = \psi(x, z). \quad (5)$$

По правилам дифференцирования сложных функций находим полные производные $t'_x = \varphi'_x + \varphi'_z z'_x$, $y'_x = \psi'_x + \psi'_z z'_x$, затем $t''_{xx} = \varphi''_{xx} + 2\varphi''_{xz} z'_x + \varphi''_{zz} (z'_x)^2 + \varphi'_z z''_{xx}$, $y''_{xx} = \psi''_{xx} + 2\psi''_{xz} z'_x + \psi''_{zz} (z'_x)^2 + \psi'_z z''_{xx}$ и т.д. Подставив эти выражения в (4), найдем выражения производных y_t через x , z и производные z_x и т.д. Если связи (5) заданы неявно, то соответствующие производные вычисляются по правилам дифференцирования неявных функций. Если вместо (5) известна только явная зависимость новых переменных через старые, то можно использовать изложенную выше методику, но проще выполнить обратный переход и свести все к предыдущему случаю.

После замены переменных получим новую задачу Коши, соответствующую (эквивалентную) исходной задаче Коши (1), (2), где $G = G(F)$ – известная (вычисляемая) функция

$$G(z^{(p)}(x), z^{(p-1)}(x), \dots, z'(x), z(x), x) = 0, \quad (6)$$

с новым отрезком интегрирования $[c, d] = [x(a), x(b)]$ и новыми начальными условиями

$$z(x_0) = z_0, z'(x_0) = z'_0, \dots, z^{(p-1)}(x_0) = z^{(p-1)}_0. \quad (7)$$

Критерий подходящей замены переменных, исключающей особую точку, можно записать в виде

$$z(x)|_{x=t^*} \neq \infty. \quad (8)$$

Рассмотрим вычислительные проблемы и различные методики решения задачи Коши (1), (2) для уравнений с особыми точками с помощью соотношений (3)–(8) на примерах уравнений Рикатти

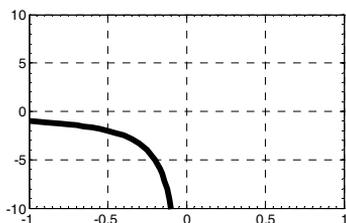
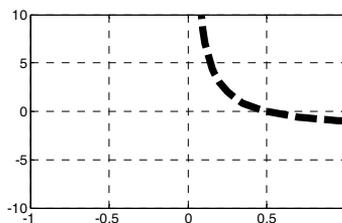
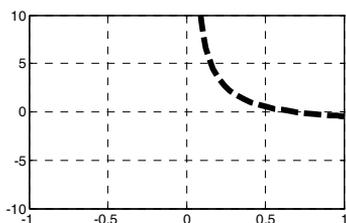
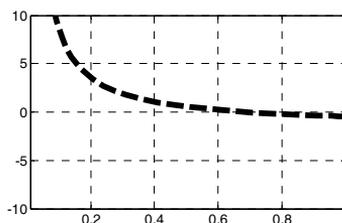
$$y' = f^2(y) + g(t), \quad (9)$$

не решаемых в общем случае в квадратурах. В качестве инструмента исследования выберем систему MatLab, включающую разные методы решения ОДУ [1].

Пример 1. Частное решение задачи Коши для уравнения Рикатти вида $y' = -1/t^2$ на отрезке $[-1, 1]$ при $y_0(t) = -1$ описывается гиперболой $y = 1/t$ и имеет одну особую точку в нуле $t^* = 0$. Численное решение методом Рунге – Кутты на отрезке $[-1, 1]$ завершается ошибкой дискретизации справа от особой точки (*Failure at $t = 2.094e-152$. Unable to meet integration tolerances without*

reducing the step size ...), что не позволяет продолжить решение (рис. 1). Обратное интегрирование на отрезке $[1, -1]$ с тем же начальным значением завершается аналогичной ошибкой слева от особой точки (*Failure at $t = -1.933e-154$*) и дает вторую ветвь, которая не соответствует исходному начальному условию – ее график смещен ниже оси $y = 0$ (рис. 2). Две найденных таким образом ветви дают приближенное (грубое) решение задачи Коши на всем отрезке интегрирования (слева и справа от особой точки). Это грубое решение фактически соответствует двум различным подзадачам Коши (прямой и обратной). Другие методы MatLab дают аналогичные ошибки и не решают проблему.

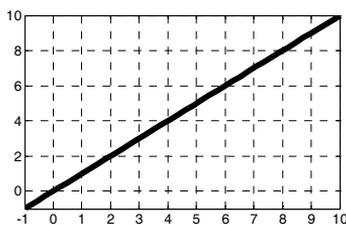
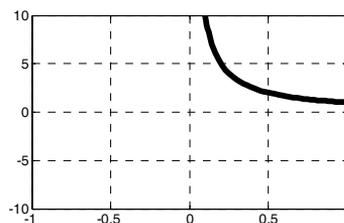
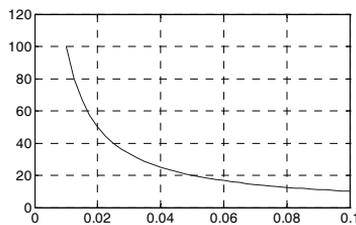
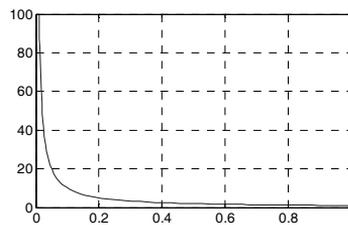
Обратное интегрирование с пристрелкой. Для построения более точного решения применим метод бисекции [1], который является «быстрым» вариантом простейшего метода подбора. Скорректируем этим методом обратное интегрирование, доведя подвижную особую точку примерно до предыдущего значения за счет подбора начального условия второй подзадачи Коши. Найденное при предыдущем обратном интегрировании грубое значение особой точки примем как начальное приближение. Вновь интегрируем и получаем меньшую ошибку ($t = -1.413e-154$) (рис. 3). Продолжая процесс пристрелки, находим уточненное решение задачи Коши справа от особой точки (рис. 4).

Рис. 1. $y(t)$ на $[-1, 1]$, $y_0 = -1$ Рис. 2. $y(t)$ на $[1, -1]$, $y_0 = -1$ Рис. 3. $y(t)$ на $[-1, 10]$, $y_0 = -0,45$ Рис. 4. $y(t)$ на $[-1, 1]$, $y_0 = -0,1$

Отметим, что пристрелкой можно добиться любой точности, но последовательные приближения правой ветви остаются некорректными, и каждая из них относится к другой задаче Коши. Погрешность пристрелки определяется «на глаз», так как критерии корректного продолжения не заданы.

Инверсная замена. Найдем более точное решение задачи Коши для того же уравнения $y' = -1/t^2$ на отрезке $t \in [-1, 1]$ для $y_0 = 1$ справа от особой точки. Для этого построим корректное продолжение с помощью других (кроме обратного времени) замен переменных. Разобьем исходную задачу на две подзадачи Коши – до и после особой точки. Сделаем инверсную замену $t = 1/x$ или $x = 1/t$. Из (4) находим новое уравнение $y'_x = 1$, отрезок интегрирования

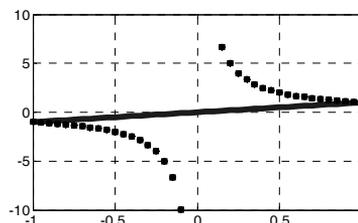
$x \in [-1, 1]$ и начальное условие для первой подзадачи $y_0(x) = -1$. Задача Коши в новых координатах уже не имеет особой точки и легко решается для любых значений x (рис. 5). Новое решение $y(x) = x$ позволяет численно (в данном случае и аналитически) найти начальное условие для второй подзадачи $y_0(\varepsilon) = y_{\text{новое}}(1/\varepsilon) = 1/\varepsilon$. Например для $\varepsilon = 0.1$ находим $y_0(\varepsilon) = 10$. Как видно, решение второй подзадачи на отрезке $[0.1, 1]$ близко к точному решению $y = 1/t$, рис. 6. При этом вторая ветвь является корректным продолжением первой.

Рис. 5. $y(x)$ на $[-1, 10]$, $y_0 = -1$ Рис. 6. $y(t)$ на $[0.1, 1]$, $y_0 = 10.0$ Рис. 7. $y(t)$ на $[0.1, 0]$, $y_0 = 10$ Рис. 8. $y(t)$ на $[0.01, 0]$ при $y_0 = 100$

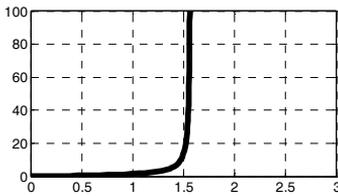
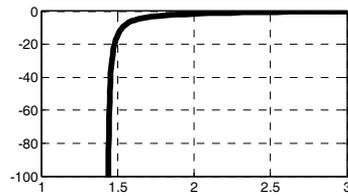
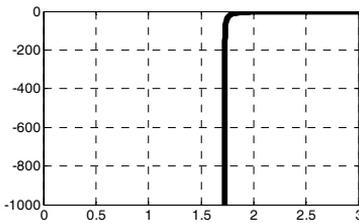
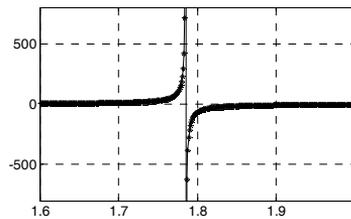
Дальнейшее корректное продолжение влево (ближе к особой точке) можно найти разными способами. Например, обратным интегрированием на отрезке $[0.1, 0]$ при $y_0 = 10$ (рис. 7). Или, еще точнее (ближе к особой точке), уменьшением размера окрестности. Например, если принять $\varepsilon = 0.01$, то $y_0(\varepsilon) = 100$ (рис. 8). Этот процесс уточнения второй ветви можно продолжать до исчерпания дискретности разрядной сетки компьютера (машинный нуль). Недостатками этой методики являются сложность вычислений и необходимость решения трех или четырех подзадач Коши.

Инверсная замена (с возвратом к старым переменным). Существенно упростить решение позволяет возврат к старым переменным непосредственно в процессе интегрирования. Для этого достаточно «одновременно» построить решение на всем отрезке в новых (сплошная линия, совпадает с прямой на рис. 5) и старых (пунктир) координатах, найденных по формулам обратного преобразования (рис. 9). Эта методика не требует лишних промежуточных вычислений (пересчета интервалов и начальных условий) и использует одно-два решения задач Коши.

Пример 2. Уравнение Рикатти вида $y' = y^2 + 1$ имеет общее решение в квадратурах $y = \operatorname{tg}(t + C)$ и бесконечное множество особых точек. Частное решение на отрезке

Рис. 9. $y(t)$ на $[-1, 1]$, y_0 — не требуется

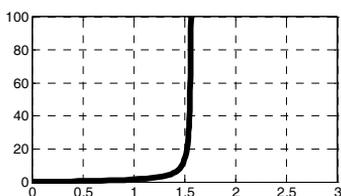
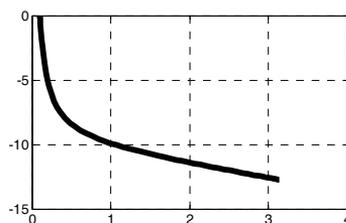
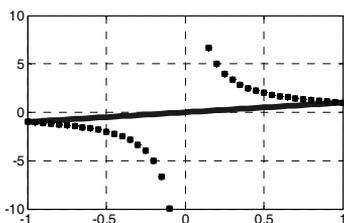
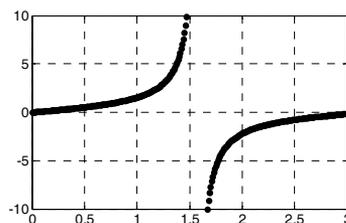
$[0, \pi]$ для $y_0 = 0$ имеет одну особенность при $t^* = \pi/2 \approx 1,570796$. При численном решении на отрезке $[0, 1.55]$ слева от особой точки проблем не возникает (рис. 10). При дальнейшем интегрировании вперед вблизи особой точки возникает ошибка дискретизации (*Failure at $t=1.570781$*) и продолжение решения невозможно. Обратное интегрирование на отрезке $[3, 0]$ также приводит к ошибке вблизи особой точки (*Failure at $t=1.429$*) (рис. 11). Обратное интегрирование с корректировкой позволяет уточнить координаты особой точки (*Failure at $t=1.578$*) и решение (рис. 12) и найти грубое решение задачи Коши слева и справа от особой точки (рис. 13).

Рис. 10. $y(t)$ на $t \in [0, 3]$, $y_0 = 0$ Рис. 11. $y(t)$ на $t \in [0, 3]$, $y_0 = 0.15$ Рис. 12. $y(t)$ на $t \in [0, 3]$, $y_0 = -0.3$ Рис. 13. Грубое решение $y(t)$

Для уточнения решения сделаем инверсную замену $t=1/x$. Находим новое уравнение $y'_x = -(y^2 + 1)/x^2$, отрезок интегрирования $x \in [\infty, 1/\pi]$ и положение особой точки $x^* = 1/t^* = 2/\pi \approx 0.64$. Критерий (8) не выполняется, и эта замена не подходит. Численная проверка подтверждает это.

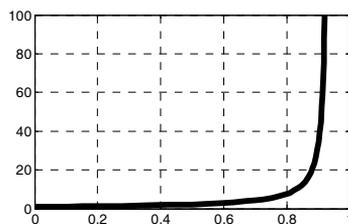
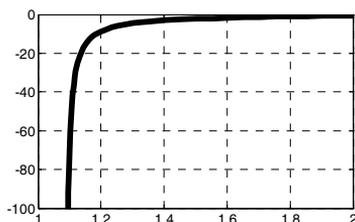
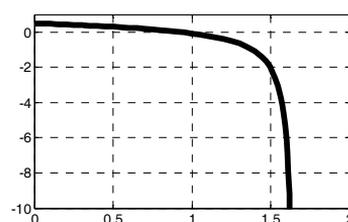
Сведение к аналогичной задаче (эталону). Для некоторых типов уравнений проще искать не новую замену переменных, а сводить их к решенным аналогичным задачам. Например, уравнение $y' = -1/(at + b)^m$ сводится к уравнению $y' = -1/t^2$ (пример 1) очевидной заменой $(at + b)^m = x^2$. Эта методика реализуется простым пересчетом «эталонного» решения без повторного решения задач Коши.

Применим ее к уравнению $y' = y^2 + 1$ на отрезке $[0, \pi]$ для $y_0 = 0$, пользуясь вторым преобразованием Пуанкаре для одной переменной $y = 1/z$. Прямое интегрирование вызывает ошибку (рис. 14, совпадает с рис. 10). Тогда исходная задача в новых переменных запишется в виде инверсного уравнения $y'_z = -1 - 1/z^2$. Прямое интегрирование нового уравнения не вызывает ошибку и позволяет найти точное решение без дополнительных замен (рис. 15). Для справки – его общее решение $y = 1/z + C$ совпадает с решением примера 1. Это инверсное уравнение можно полностью преобразовать в пример 1 заменой $q = z + z^3/3$. Применим далее методику быстрого исключения особой точки (рис. 16, совпадает с 9) и сравним с точным частным решением $y = \operatorname{tg} t$ (рис. 17). Задача решена.

Рис. 14. $y(t)$ на $t \in [0, 3]$, $y_0 = 0$ Рис. 15. $y(x)$ на $[0.1, \pi]$, $y_0 = 0$ Рис. 16. $y(t)$ на $[-1, 1]$, y_0 не требуетсяРис. 17. Точное решение $y = \operatorname{tg} x$

Пример 3. Уравнение Рикатти $y'_t = y^2 + t$ не решается в квадратурах. Интегрирование вперед на отрезке $t \in [0, 2]$ при $y_0 = 1$ вызывает ошибку слева от особой точки (*Failure at $t=0.93$*) (рис. 18). Интегрирование назад дает грубое решение и ошибку справа от особой точки (*Failure at $t=1.09$*) (рис. 19). Построим корректное решение, подобрав подходящую замену только зависимой переменной.

Деформация пространства. Преобразование $z = 1/(y + 1)$ дает новое уравнение $z'_t = z'y'_t = -z^2t - (1 - z)^2$, которое не решается в квадратурах. При этом пределы интегрирования и положение особой точки не меняются (время сохраняется). Изменяется только начальное условие $z(1) = 1/2$. Интегрирование нового уравнения вперед не выводит особую точку за пределы отрезка $[0, 2]$, и значение z не может быть вычислено вблизи особой точки $t = 2$, рис. 20. Значит, это решение оказалось неудачным.

Рис. 18. $y(t)$ на $t \in [0, 2]$, $y_0 = 1$ Рис. 19. $y(t)$ на $t \in [2, 0]$, $y_0 = -0.5$ Рис. 20. $z(t)$ на $t \in [0, 2]$, $y_0 = 1/2$

Попробуем сдвинуть особую точку вправо за пределы отрезка интегрирования. Для этого заменим старое начальное условие $y_0 = 1$ на близкое новое

$y_0 = 0$ (выбрано подбором). Интегрирование вперед дает ошибку слева от новой особой точки (*Failure at $t \approx 1.99$*) (рис. 21). Вновь применим предыдущее преобразование $z = 1/(y + 1)$ и интегрируем соответствующее ему уравнение вперед с новым начальным условием $z(0) = 1$, что приводит к новой особой точке (*Failure at $t \approx 2.6$*) (рис. 22). Как видно, новое решение не содержит особых точек на отрезке $[0, 2]$ и вычисляется вблизи старой особой точки с любой степенью точности. Например, точному значению нового решения $z(2) = -0.0138$, найденному как его

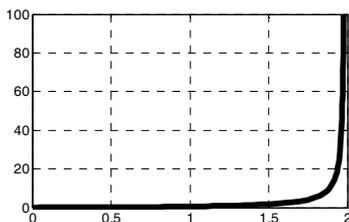


Рис. 21. $y(t)$ на $t \in [0, 2]$, $y_0 = 0$

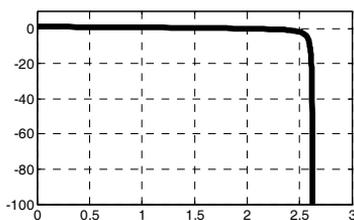


Рис. 22. $z(t)$ на $t \in [0, 2]$, $z_0 = 1$

конечное значение на отрезке $[0, 2]$, соответствует значению исходного решения $y = 1/z - 1 = -73.4638$. Используя его как начальное значение для второй старой подзадачи, находим корректное продолжение решения справа от особой точки (*Failure at $t = 1.98639$*) (рис. 23).

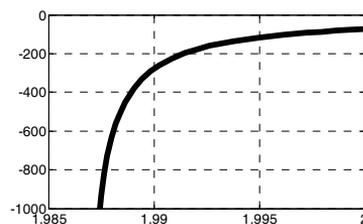
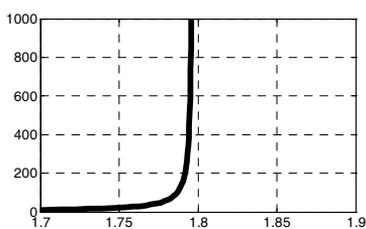
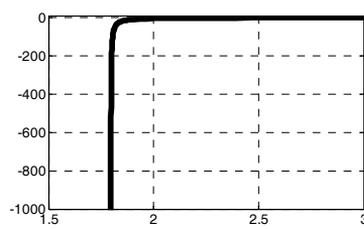
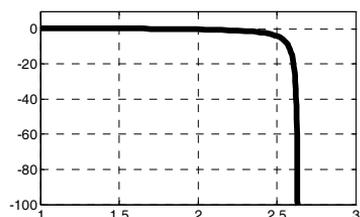
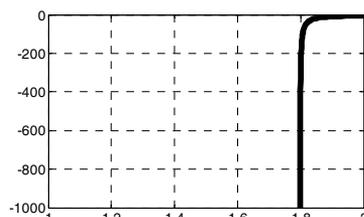


Рис. 23. $y(t)$ на $t \in [0, 2]$, $y_0 = -73.4638$

Пример 4 (Орлов В.Н. [3]). Задача Коши для уравнения Рикатти $y' = y^2 + \sin t$, $y(1) = 1$ не решается в квадратурах [4]. Интегрирование вперед на отрезке $t \in [1, 3]$ вызывает ошибку вблизи особой точки (*Failure at $t = 1.796639$*) и не позволяет продолжить решение (рис. 24). Обратное интегрирование с корректировкой завершается ошибкой и дает только грубое решение (*Failure at $t = 1.795131$*) (рис. 25).

Аналогично предыдущему примеру деформируем пространство $z = 1/(y + 1)$ с сохранением времени. Получим новое уравнение $z'_t = -z^2 \sin t - (1 - z)^2$, которое также не решается в квадратурах. Интегрируем его вперед на том же интервале $t \in [1, 3]$ с новым начальным условием $z(1) = 1/2$ (рис. 26). Это приводит к ошибке в новой особой точке (*Failure at $t = 2.638087$*), которая отличается от старой $t \approx 1.8$ и позволяет вычислить нужные значения вблизи нее. Например, точному значению $z(2) = -0.2594$, найденному на конце нового решения на отрезке $[1, 2]$, соответствует значение исходного решения $y = 1/z - 1 = -4.8551$. Используя его как начальное значение для второй старой подзадачи, находим корректное продолжение решения справа от особой точки (*Failure at $t = 1.796676$*) (рис. 27).

Методика специальной замены [4. С. 78] $x = t - t_0$, $z = y(t, t_0, y_0) - y_0$ сводит задачу Коши $y'_t = f(x, y)$ от начальных данных $t = t_0$, $y = y_0$ к исследованию зависимости от параметров правой части решения нового уравнения $z'_x = f(x + t_0, z + y_0)$. Этой задачей занимался Пуанкаре [5].

Рис. 24. $y(t)$ на $[1, 3]$, $y_0 = 1$ Рис. 25. $y(t)$ на $[3, 1]$, $y_0 = -0.65$ Рис. 26. $z(t)$ на $[1, 3]$, $y_0 = 1/2$ Рис. 27. $y(t)$ на $[2, 1]$, $y_0 = -4.855$

Пример 5. (Следствие из теоремы о зависимости решения от параметра) [4. С. 86]. Рассмотрим уравнение $y'_t = y^2 + t$ с начальным условием $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ и подвижной особой точкой $t^* = 1$ (пример 3). Решение этого уравнения записывается через функции Эйри [2]:

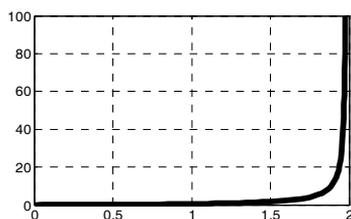
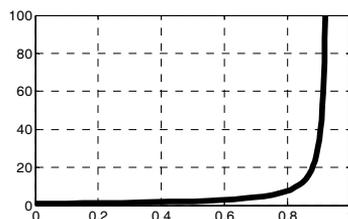
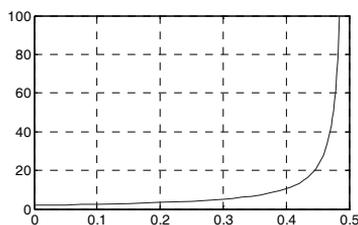
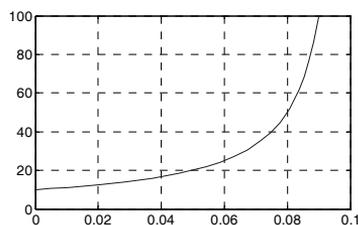
$$y = \frac{(C_1 \cdot A_i(1-t) + B_i(1-t))}{(C_1 \cdot A_i(-t) + B_i(-t))}.$$

Специальная замена $x = t - t_0 = t$, $z = y(t, t_0, y_0) - y_0 = y(t, t_0, y_0) - 1$ дает новое уравнение $z'_x = z'_t t'_x = z'_y y'_t = y^2 + t = (z + y_0)^2 + x$.

Его решение через функции Эйри

$$z = \frac{-(y_0 \cdot A_i(-t) - A_i(1-t) + C_1 \cdot y_0 \cdot B_i(-t) - C_1 \cdot B_i(1-t))}{A_i(-t) + C_1 \cdot B_i(-t)}.$$

Построим графики $z(y_0)$ (рис. 28–31).

Рис. 28. $y(t)$ при $y_0 = 0$ или $z(x)$ при $z_0 = 0$ Рис. 29. $y(t)$ при $y_0 = 1$ или $z(x)$ при $z_0 = 0$ Рис. 30. $y(t)$ при $y_0 = 2$ или $z(x)$ при $z_0 = 0$ Рис. 31. $y(t)$ при $y_0 = 10$ или $z(x)$ при $z_0 = 0$

Методики эталонной замены. Возможный вариант эталонных замен приведен в таблице.

Таблица эталонных замен для исключения особых точек

№	$y(t) =$	$y'(t) =$	$\int y(t) dt =$	Замена	Результат	Пример
1	t	1	$1/2t^2 + C$	$t = 1/x$	Исключение особой точки	1) $y' = -1/t^2$
2	t^m	$m t^{m-1}$	$t^{m+1}/(m+1) + C, m \neq -1$			
3	$1/t$	$-1/t^2$	$\ln t + C$			
4	$\ln t$	$1/t$				
5	$\sin t$	$\cos t$	$-\cos t + C$			
6	$\operatorname{tg} t$	$1/\cos^2 t$		$y = 1/z$	Исключение особой точки	2) $y' = y^2 + 1$
7				$z = 1/(y+1)$	Сдвиг особой точки	3) $y'_t = y^2 + t$
8				$z = 1/(y+1)$	Сдвиг особой точки	4) $y' = y^2 + \sin t$

При наличии множества особых точек описанные процедуры выполняются для каждой из них. Изложенные в данной работе подходы применимы не только для задачи Коши, но и для других задач, связанных с уточнением решений в окрестностях сингулярных точек (краевых, в частных производных, интегральных, алгебраических и даже заданных алгоритмически).

В статье приведены различные методики, позволяющие преодолеть проблемы, возникающие при численном решении дифференциальных уравнений с особыми точками. Полученные результаты могут быть полезны при исследовании реальных физических и биологических процессов, описываемых сингулярными моделями.

Литература

1. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MatLab. СПб.: Питер, 2001.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.
3. Орлов В.Н. Исследование приближенного решения с подвижными полюсами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. Минск, 1989.
4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
5. Пуанкаре А. Избранные труды: в 3 т. М.: Наука, 1974. Т. 3.
6. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
7. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

НОВОЖИЛОВА НИНА ВАСИЛЬЕВНА – кандидат экономических наук, доцент кафедры информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (mallin@mail.ru).

ФЕДОТОВ ВЛАДИСЛАВ ХАРИТОНОВИЧ – кандидат химических наук, доцент кафедры информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (fvh@inbox.ru).

N. NOVOZHILOVA, V. FEDOTOV
NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH SINGULAR POINTS

Key words: *mathematical modeling, dynamic processes, numerical methods, computing, approximate computing methods, MatLab, development of a new method of mathematical modeling, technical systems, dynamics of complex systems, numerical analysis, methods of numerical calculations, computational aspects of the problem of neighborhoods of singular points, clarification of solutions in the vicinity of singular points, singular model.*

Dynamics of complex systems (physical, biological, etc.) is described by differential equations. Numerical investigation of their solutions in the vicinity of singular points there occurs the problem of correct continue – of exact hit on the same line of the family of integral curves, which existed before passing through a singular point. The aim of this work is the construction of and approbation of methods of numerical calculations in the vicinity of singular points that allow to find the correct continuation of solutions.

References

1. D'yakonov V., Kruglov V. *Matematicheskie pakety rasshireniya MatLab* [Mathematical expansion packs MatLab]. St. Petersburg, Piter Publ., 2001.
2. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for scientists and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1974.
3. Orlov V.N. *Issledovanie priblizhennogo resheniya s podvizhnymi polyusami nelineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii: avtoref. dis. ... kand. fiz.-matem. nauk* [The study of the approximate solution with movable poles of nonlinear ordinary differential equations. Abstract of PhD thesis]. Minsk, 1989.
4. Petrovskii I.G. *Leksii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on the theory of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1970.
5. Puankare A. *Izbrannye trudy: v 3 t.* [Selected works. 3 vols]. Moscow, Nauka Publ., 1974, vol. 3.
6. Puankare A. *O krivykh, opredelyaemykh differentsial'nymi uravneniyami* [On curves defined by differential equations]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1947.
7. Forsait Dzh., Mal'kol'm M., Moular K. *Mashinnye metody matematicheskikh vychislenii* [Machine methods of mathematical calculations]. Moscow, Mir Publ., 1980.

NOVOZHILOVA NINA – Candidate of Economics Sciences, Associate Professor of Information Systems Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (mallin@mail.ru).

FEDOTOV VLADISLAV – Candidate of Chemical Sciences, Associate Professor of Information Systems Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (fvh@inbox.ru).

Ссылка на статью: Новожилова Н.В., Федотов В.Х. Численное решение дифференциальных уравнений с особыми точками // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 153–163.

УДК 004.8.032.26:159.922.7.016.2

ББК 397:Ю983.402

Е.В. СЛАВУТСКАЯ, В.С. АБРУКОВ, Л.А. СЛАВУТСКИЙ

НЕЙРОСЕТЕВОЙ СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ УРОВНЕВЫХ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, системный анализ, психодиагностика, уровневые психологические характеристики.

Аппарат искусственных нейронных сетей (ИНС) используется для системного анализа данных психодиагностики. Показано, что обучение ИНС, как задача нелинейной многопараметрической оптимизации, позволяет оценить связи между разноуровневыми психологическими характеристиками. Предлагаются количественные статистические критерии оценки качества ИНС моделей. Анализ авторских данных психодиагностики позволил обнаружить латентные связи между разноуровневыми психологическими характеристиками детей предподросткового возраста.

Аппарат искусственных нейронных сетей (ИНС) основан на принципах когнитивной науки [15, 21] и может использоваться в практической психологии [12, 14, 18]. При этом широкого распространения для обработки, анализа и моделирования данных психодиагностики ИНС пока не получили. Главная причина этого – отсутствие универсальных правил процесса обучения ИНС [11, 17], которые определяются объемом и качеством данных, числом факторов и целевых функций, а также сложность в интерпретации полученных результатов. Чаще всего аппарат ИНС используется для автоматизации самой процедуры медико-психологической диагностики [20] или – при построении моделей в психофизиологии [16]. Обучение нейронной сети требует профессиональной подготовки, и абсолютное большинство психологов предпочитает пользоваться традиционными статистическими методами анализа [8]. Оценка численных показателей психологических признаков при обучении ИНС часто оказывается в практической психологии некорректной и приводит к низкой достоверности полученных результатов. Это является результатом высокой неоднородности психодиагностических данных, полученных в разное время, разными психологами, в разных условиях и т.д. В настоящей работе ИНС предлагается использовать для системного анализа взаимосвязей разноуровневых психологических характеристик с помощью статистической оценки качества ИНС моделей.

В нашей стране огромный вклад в разработку системного подхода в психологии внесли такие видные деятели отечественной психологической науки, как Б.Г. Ананьев, А.П. Анохин, С.Л. Рубинштейн, Б.Ф. Ломов. Ими были разработаны принципы системного подхода в психологии в качестве основного инструмента познания психики человека. Это позволило анализировать психические явления с точки зрения взаимодействия внешних (социальных) и внутренних (природных и психологических) факторов как единое целое.

По Б.Ф. Ломову, психика как система представляет собой многомерное и иерархически организованное динамическое целое. В иерархии психики человека выделяются ее уровни. В этом контексте на самом высоком уровне изучается личность и рассматривается система отношений человека. На следующем, втором, уровне находятся свойства личности, проявляющиеся в ее

деятельности и поведении. На третьем, более низком, уровне, рассматриваются психические процессы и состояния, например, мышление, память, внимание и т.д. Б.Ф. Ломов считал, что этот уровень связывает психологию с математикой и физикой. На базовом, самом нижнем, уровне располагаются биологические задатки и структуры физиологического обеспечения психических процессов, что связывает этот уровень с биологическими науками и нейрофизиологией. Система психических явлений состоит из разных уровней. Психика разделяется на когнитивную, коммуникативную и регулятивную, изучается каждая на своем уровне и представляет собой сложно организованное целое, начиная от работы мозга, функционирования психических процессов до проявления свойств личности в деятельности и общении, как бессознательное и сознательное. Такое единое целое представляет собой некий «функциональный организм», позволяющий индивиду ориентироваться и успешно адаптироваться в быстро меняющемся мире. При учете детерминант развития психики необходимо опираться на совокупность свойств различного порядка: причинно-следственные характеристики, межфункциональные связи, опосредующие звенья, внешние и внутренние факторы психического развития, так как в одних условиях одни и те же факторы могут выступать как в виде предпосылок, так и в виде опосредующих развитие звеньев либо самостоятельных характеристик. Специфические взаимосвязи многоуровневых характеристик, объединяясь в динамическое целое, определяют результат (картину психического развития) той или иной возрастной стадии и служат прогнозом развития для последующей. Концепция уровней исследования человека и его психики предоставляет возможность для систематизации получаемых в психологии данных [7].

В детской психологии особого внимания требуют переходные и кризисные возрастные периоды, психологическое содержание которых до сих пор недостаточно изучено. Психическое развитие в это время определяется специфической динамикой, отличной от стабильных возрастов, и зависит от большого числа разнообразных многоуровневых характеристик: социально-психологических факторов, гендерных особенностей, уровневых характеристик интеллекта, индивидуально-психологических различий [9, 10]. Одним из таких сложных возрастных периодов является предпоздросковый возраст [12]. Для изучения психического развития школьников предпоздроскового возраста системный анализ многоуровневых психологических характеристик является особо актуальным.

Методика анализа. В исследовании использовались стандартизированные методы психодиагностики, выбор которых определялся следующими критериями: выявление разнообразных разноуровневых психологических показателей школьников, достаточное количество признаков для проведения интеллектуального анализа данных, последующего системного анализа особенностей психического развития детей на этом возрастном отрезке.

В обследовании приняли участие 90 школьников 5-х классов.

Проведена психодиагностика следующих уровневых психологических характеристик школьников:

– самый высокий, личностный, уровень представлен показателями отношений Д1 – отношение к значимым родственникам – отцу, матери; Д2 – взаимоотно-

ношения со сверстниками; Д3 – отношение к школе, учителям; Д4 – отношение к себе (тест «Незаконченные предложения» В. Михала для детей 7-12 лет в адаптации Д.В. Лубовского) и мотивационными характеристиками (потребность в достижении – ПД, тест «Потребность в достижениях» Ю.М. Орлова);

– к свойствам второго уровня относятся двенадцать личностных черт по 12-факторному личностному опроснику Р.Б. Кеттелла и Р.В. Коана для детей 8-12 лет [19];

– уровень психических процессов и состояний определялся с помощью свободно культурного интеллектуального теста Р.Б. Кеттелла, выявлялся флюидный интеллект, выражающийся в виде коэффициента интеллекта IQ [19];

– в качестве базового, нижнего, уровня биологических задатков и физиологического обеспечения психических процессов рассматривался тип нервной системы по психомоторным показателям (теппинг-тест Е.П. Ильина).

Создавая свободно культурный тест интеллекта, Р.Б. Кеттелл предполагал, что он будет выявлять биологически заданный интеллект, сформированный на базе архитектоники коры больших полушарий. Поэтому в нашем исследовании мы объединили показатели биологических задатков и характеристики обеспечения психических процессов и состояний в один уровень.

Вертикальный системный анализ в психологии подразумевает, как правило, нахождение причинно-следственных связей между психологическими характеристиками разных уровней. Соответствующие результаты тестов или опросников чаще всего имеют разные шкалы. Многие психологические показатели описываются всего несколькими целочисленными значениями. Примером может служить признак пола как одна из характеристик базового уровня. Эта характеристика принимает всего два значения. В этих условиях нахождение связей между характеристиками разных уровней при помощи традиционного корреляционного анализа оказывается затруднительным. В настоящей работе для оценки связи между характеристиками разных уровней предлагается использование аппарата искусственных нейронных сетей (ИНС), в частности оценка качества обучения соответствующих ИНС моделей. Пример такого анализа показан на рис. 1. На вход сети подаются значения личностных качеств по Р.Б. Кеттеллу (психологические характеристики второго уровня). А целевой функцией является коэффициент интеллекта IQ, который относится к психологическим характеристикам нижнего уровня (индивидуально-психологические, биологически детерминированные характеристики).

При проведении исследований использовалась отечественная аналитическая платформа «Deductor» [3, 4], содержащая в себе средства оценки качества данных, их «очистки» от дубликатов и противоречий и «аномальных» значений, средства предварительного анализа данных (парциальная обработка, факторный и корреляционный анализы), методы интеллектуального анализа данных, включая ИНС, различные средства визуализации результатов анализа и моделирования.

Качество нейросетевой модели можно оценить по диаграмме рассеяния – разбросу значений целевой функции при обучении сети. Количественными критериями могут служить среднеквадратичное отклонение (ошибка) и процент распознаваемых связей при заданной ошибке.

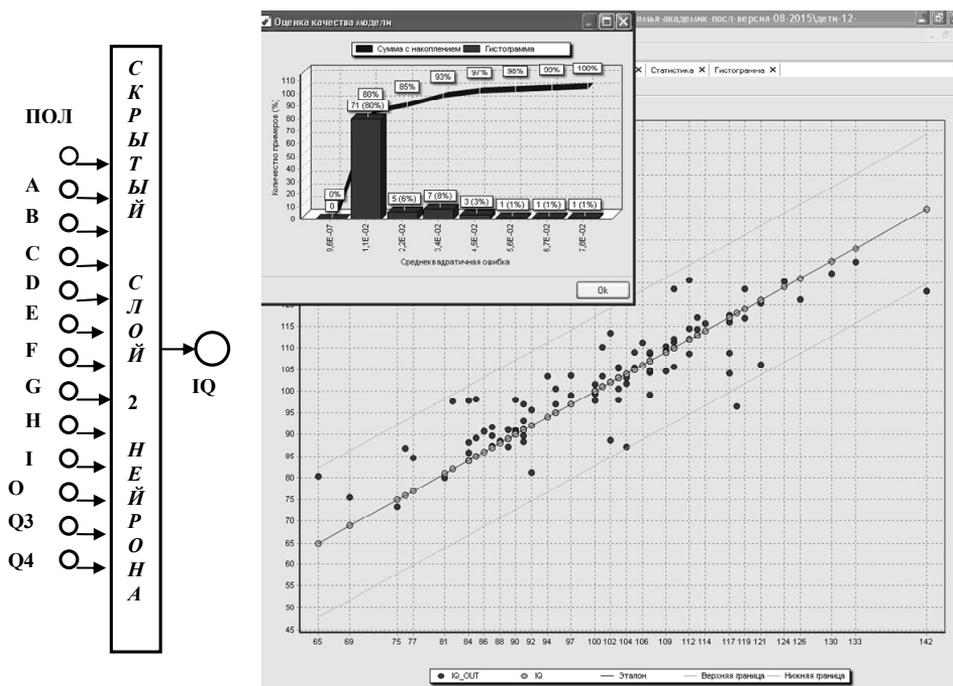


Рис. 1. Структура ИНС, диаграмма рассеяния и гистограмма распределения среднеквадратичной ошибки при обучении сети для девочек и мальчиков. Интерпретация личностных качеств в 12-факторном опроснике Р.Б. Кеттелла и Р.В. Коана (СРQ):

- А – общительность – замкнутость; В – абстрактное – конкретное мышление;
 С – эмоциональная стабильность – неустойчивость; D – возбудимость – уравновешенность;
 Е – независимость – покорность; F – беспечность – озабоченность; G – высокая – низкая дисциплинированность; H – смелость – робость; I – мягкость – твердость;
 O – тревожность – спокойствие; Q3 – высокий – низкий самоконтроль; Q4 – напряженность – расслабленность. IQ – коэффициент интеллекта по результатам свободно культурного теста Р.Б. Кеттелла

Пример гистограммы распределения среднеквадратичной ошибки по интервалам показан в верхней части диаграммы. Сравнивая гистограммы для разных моделей, можно выбрать лучшую, т.е. модель с наиболее предпочтительным видом функций распределения (плотности распределения) ошибок. Численными критериями могут служить максимальная среднеквадратичная ошибка σ_{\max} (в данном случае $\sigma_{\max} = 7,8\%$) и число примеров n_{σ} (в абсолютных единицах и процентах), обладающих ошибкой в 5% (0,05) или 1% (0,01) (в данном случае $n_{0,05} = 97\%$, $n_{0,01} = 80\%$) (см. рис. 1). Таким образом, качество ИНС модели и процент распознаваемых при обучении сети связей поддаются традиционному статистическому описанию с доверительным интервалом и уровнем значимости.

Для психологических задач важным является возможность оценить наличие опосредованных (латентных) связей. Для этого можно менять количество входных параметров сети (признаков) и после оценки качества модели сделать выводы о тех входных параметрах (психологических признаках), которые являются наиболее важными. Приведенный выше пример анализа и

численные критерии оценки ИНС моделей позволяют, меняя структуру ИНС, входные признаки и целевую функцию проводить вертикальный системный анализ уровневых психологических характеристик.

Результаты анализа. Для системного анализа гендерных различий межфункциональных связей аппарат ИНС может использоваться после разделения респондентов по признаку пола. Для примера на рис. 2 показаны результаты обучения ИНС отдельно для мальчиков (41). В этом случае признак пола на входе сети отсутствует. В остальном структура сети аналогична структуре на рис. 1.

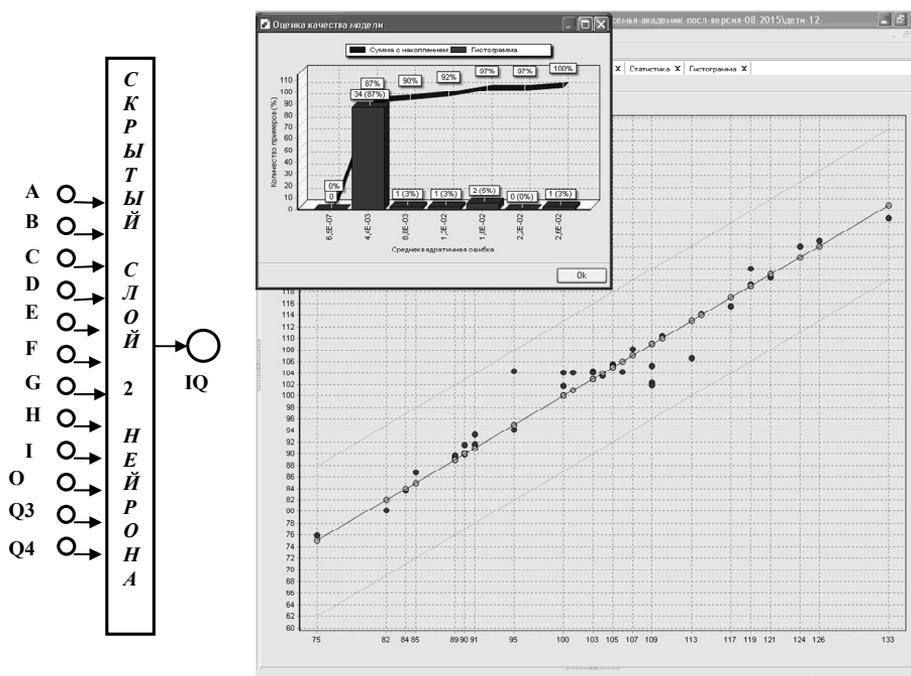


Рис. 2. Структура ИНС, диаграмма рассеяния и распределение средноквадратичной ошибки при обучении сети после разделения респондентов по признаку пола (мальчики)

Как видно из диаграммы рассеяния (рис. 2), качество ИНС модели для детей одного пола повышается. Здесь максимальная ошибка $\sigma_{\max} = 2,6\%$, $n_{0,01} = 91\%$. Для девочек (49) качество модели мало отличается от результатов, полученных на общей выборке (рис. 1). Это позволяет сделать предварительный вывод о более структурированных связях личностных черт с коэффициентом интеллекта IQ у мальчиков по сравнению с таковым у девочек [14]. Для подтверждения этого вывода с использованием полученных ранее данных [13] построена ИНС модель для мальчиков, позволяющая выделить наиболее связанные с IQ личностные качества. Оказывается, что для получения качественной ИНС модели для мальчиков на входе нейронной сети достаточно использовать только три признака из 12 личностных черт Р.Б. Кеттелла. Соответствующая структура ИНС показана на рис. 3.

Для модели, представленной на рис. 3, максимальная ошибка составила $\sigma_{\max} = 3,2\%$, $n_{0,01} = 86\%$. Для девочек соответствующего результата добиться не удастся. Для них с уменьшением входных признаков (в любой комбинации) качество обучения ИНС ухудшается. Процент распознаваемых связей оказывается ниже, чем в общей выборке (рис. 1), и $\sigma_{\max} \geq 13,6\%$. Это подтверждает сделанный ранее вывод [9] о более однотипных связях психологических признаков у мальчиков в этом возрасте.

Для оценки опосредованных (латентных) связей уровневых психологических характеристик строилась ИНС модель, на вход которой подавались значения биологически детерминированных характеристик нижнего уровня (пол, IQ, результаты тестинг-теста Т, характеризующие тип нервной системы), а целевой функцией нейронной сети последовательно служили личностные характеристики наиболее высокого уровня (потребность в достижении ПД, отношения: к семье – Д1; сверстникам – Д2; школе – Д3; себе – Д4) (см. рис. 4).

По результатам последовательного анализа связей психологических характеристик базового нижнего и верхнего личностных уровней обнаружено, что качество ИНС модели рис. 4 существенно зависит от целевой функции – личностной характеристики высшего уровня. Если для Д4 и Д2 обучение сети позволяет говорить о наличии устойчивой связи входных и выходных характеристик $\sigma_{\max} = 0,77\%$, $n_{0,01} = 100\%$ и $\sigma_{\max} = 6,2\%$, $n_{0,5} = 95\%$, $n_{0,01} = 80\%$, соответственно, то для ПД, Д1, Д3 качество обучения сети оказывается очень низким. Для ПД $\sigma_{\max} = 12\%$, $n_{0,5} = 86\%$, $n_{0,01} = 0\%$; для Д1 $\sigma_{\max} = 16\%$, $n_{0,5} = 72\%$, $n_{0,01} = 0\%$; для Д3 $\sigma_{\max} = 20\%$, $n_{0,5} = 76\%$, $n_{0,01} = 0\%$.

Таким образом, можно предположить, что существует значимая взаимосвязь характеристик базового нижнего уровня – интеллекта (IQ) и типа нервной системы (Т) с такими показателями высшего уровня, как отношение к себе (Д4) и сверстникам (Д2). А мотивация, отношение к семье и к школе зависят от большего количества факторов.

Для оценки этих факторов необходимо принимать во внимание психологические характеристики среднего уровня. Обнаружено, что такими характеристиками могут быть коммуникативные признаки в 12-факторном опроснике Р.Б. Кеттелла и Р.В. Коана (СРQ): А – общительность – замкнутость; Н – смелость – робость в общении (см.

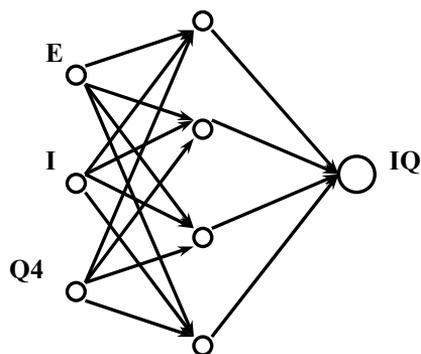


Рис. 3. ИНС модель с тремя личностными чертами, наиболее тесно связанными с IQ (мальчики)

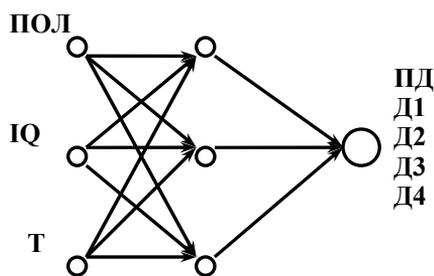


Рис. 4. ИНС модель для исследования связей характеристик нижнего и верхнего уровней

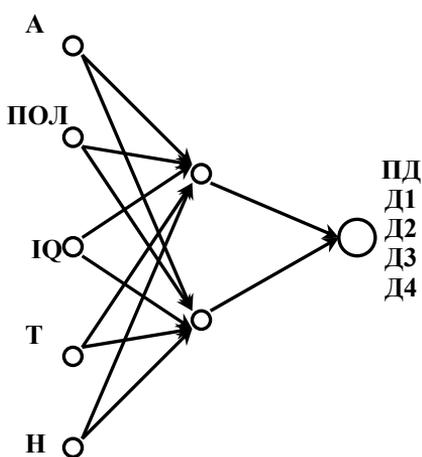


Рис. 5. ИНС модель для исследования опосредованных (через личностные черты) связей характеристик нижнего и верхнего уровней

рис. 5). Если на вход ИНС модели вместе с показателями нижнего уровня подаются значения этих признаков, то качество обучения нейронной сети существенно улучшается для целевых функций, качество ИНС моделей с которыми оказалось низким для структуры нейросети рис. 4. Для ПД $\sigma_{\max} = 4,8\%$, $n_{0,5} = 100\%$, $n_{0,01} = 86\%$; для Д1 $\sigma_{\max} = 16\%$, $n_{0,5} = 87\%$, для Д3 $\sigma_{\max} = 5,7\%$, $n_{0,5} = 81\%$, $n_{0,01} = 62\%$.

В прикладном плане полученные результаты требуют дополнительных исследований, последующего всестороннего анализа и психологической интерпретации.

Выводы. Результаты психодиагностических срезов представляют собой сложный прикладной объект. Системный анализ таких данных чаще всего предполагает их вероятностное (статистическое) описание. Предлагаемый в

настоящей работе подход, основанный на использовании аппарата искусственных нейронных сетей, позволяет обнаружить опосредованные латентные связи между психологическими характеристиками. Традиционный для психологии корреляционный и факторный анализ требует существования линейной связи между психологическими признаками и не позволяет даже качественно оценить нелинейные связи. Обучение ИНС, как многопараметрическая задача нелинейной оптимизации, с оценкой качества модели при помощи традиционных средств статистической теории оценивания может являться очень эффективным инструментом системного анализа в психологии. Перспективы применения ИНС в психологических исследованиях связаны с решением различных задач анализа и моделирования данных [1, 2] и созданием баз знаний [5].

Литература

1. Аbruков В.С., Николаева Я.Г., Макаров Д.Н., Сергеев А.А., Карлович Е.В. Применение средств интеллектуального анализа данных (data mining) для исследования неполно определенных систем // Вестник Чувашского университета. 2008. № 2. С. 233–241.
2. Аbruков В.С., Николаева Я.Г. Количественные и качественные методы: соединяем и властвуем! // Социологические исследования. 2010. № 1. С. 142–145.
3. Аbruков В.С., Ефремов Л.Г., Коцеев И.Г. Возможности создания системы поддержки принятия решений и управления вузом с помощью аналитической платформы deductor // Интеграция образования. 2013. № 1(70). С. 17–23.
4. Аbruков В.С., Ефремов Л.Г., Коцеев И.Г. Новые подходы к разработке моделей системы поддержки принятия решений и управления вузом // Вестник Чувашского университета. 2013. № 1. С. 224–228.
5. Аbruков В.С., Аbruков С.В., Смирнов А.В., Карлович Е.В. Методы интеллектуального анализа данных при создании баз знаний // Вестник Чувашского университета. 2015. № 1. С. 140–146.

6. Арзамасцев А.А., Зенкова Н.А. Моделирование в психологии на основе искусственных нейронных сетей. Тамбов: ИМФИ ТГУ им. Г.Р. Державина, 2003.
7. Барабаничников В.А. Системный подход в структуре психологического познания // Методология и история психологии. 2007. Т. 2, вып. 1. С. 86–99.
8. Воробьев А.В. Обзор применения математических методов при проведении психологических исследований // Психологические исследования. 2010. № 2(10). URL: <http://psystudy.ru/index.php/num/2010n2-10/311-vorobiev10.html>.
9. Славутская Е.В. Исследование взаимосвязи эмоционально-волевых качеств с интеллектом и дезадаптацией школьников 9-11 лет: дис. ... канд. психол. наук. Казань, 2000. 185 с.
10. Славутская Е.В. Экспериментальное изучение гендерных различий в развитии эмоционально-волевых и интеллектуальных свойств младших подростков // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2009. Вып. 9(87). С. 127–129.
11. Славутская Е.В., Аbruков В.С., Славутский Л.А. Интеллектуальный анализ данных психодиагностики школьников предпоздкового возраста // Вестник Чувашского университета. 2012. № 3. С. 226–232.
12. Славутская Е.В., Славутский Л.А. Нейросетевой анализ взаимосвязи вербального и невербального интеллекта младших подростков // Психологический журнал. 2014. Т. 35, № 5. С. 48–56.
13. Славутская Е.В., Славутский Л.А. Препоздковый возраст: формирование связей в структуре личности // Психологические исследования. 2014. Т. 7, № 37. URL: <http://psystudy.ru/index.php/num/2014v7n37/1040-slavutskaya37.html>.
14. Славутская Е.В., Славутский Л.А. Использование искусственных нейронных сетей для анализа гендерных различий младших подростков // Психологические исследования. 2012. Т. 5, № 23. URL: <http://psystudy.ru/index.php/num/2012v5n23/684-slavutskaya23.html>.
15. Хайкин С. (Haykin S). Нейронные сети: полный курс: 2-е изд.: пер. с англ. М.: Вильямс, 2006.
16. Шендяпин В.Н., Скотникова И.Г., Барабаничников В.А., Тарасов В.Б. Математическое моделирование уверенности при принятии решения в сенсорных задачах // Психологический журнал. 2008. Т. 29, № 4. С. 84–97.
17. Abruков V.S., Karlovich E.V., Afanasyev V.N., Semenov Y.V., Abruков S.V. Creation of propellant combustion models by means of data mining tools. *International Journal of Energetic Materials and Chemical Propulsion*, 2010, vol. 9, no. 5, pp. 385–396.
18. Baxt W.G. Complexity, chaos and human physiology: the justification for non-linear neural computational analysis. *Cancer Lett.*, 1994, vol. 77, no. 2-3, pp. 85–93.
19. Cattell R. B. Advanced in Cattellian Personality Theory. Handbook of Personality. Theory and Research. New York, The Guilford Press, 1990.
20. Reznichenko N.S., Shilov S.N., Abdulkin V.V. Neuron Network Approach to the Solution of the Medical-Psychological Problems and in Diagnosis Process of Persons with Disabilities (Literature Review). *Journal of Siberian Federal University. Humanities & Social Sciences*, 2013, vol. 9(6), pp. 1256–1264.
21. Hebb D. Organization of behavior: New York, Science Edition, 1961.

СЛАВУТСКАЯ ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА – кандидат психологических наук, доцент кафедры психологии и социальной педагогики, Чувашский государственный педагогический университет, Чебоксары, Россия (slavutskayaev@gmail.com).

АБРУКОВ ВИКТОР СЕРГЕЕВИЧ – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной физики и нанотехнологий, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (abrukov@uandex.ru).

СЛАВУТСКИЙ ЛЕОНИД АНАТОЛЬЕВИЧ – доктор физико-математических наук, профессор кафедры автоматизации и управления в технических системах, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (las_co@mail.ru).

E. SLAVUTSKAYA, V. ABRUKOV, L. SLAVUTSKII
NEURAL NETWORK SYSTEMS ANALYSIS
OF THE SPLIT-LEVEL PSYCHOLOGICAL CHARACTERISTICS

Key words: artificial neural networks, systems analysis, psycho-diagnostics, split-level psychological characteristics.

The artificial neural networks (ANN) is used for system analysis of a psycho-diagnostic data. It is shown that the training of ANN, as a problem of nonlinear multi-parameter optimization, enables to evaluate the relationship between psychological characteristics of different levels. The quantitative statistical criteria for evaluating the quality of the ANN models are available. It is shown that the analysis of psycho-diagnostics allows to detect latent interconnections between the split-level psychological characteristics of children of pre-adolescent age.

References

1. Abrukov V.S., Nikolaeva Ya.G., Makarov D.N., Sergeev A.A., Karlovich E.V. *Primenenie sredstv intellektual'nogo analiza dannykh (data mining) dlya issledovaniya nepolno opredelennykh sistem* [Using of intellectual data analysis (data mining) for investigation of incompletely defined systems]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2008, no. 2, pp. 233–241.
2. Abrukov V.S., Nikolaeva Ya.G. *Kolichestvennye i kachestvennye metody: soedinyam i vlastvuem!* [Quantitative and qualitative methods: unite and rule!]. *Sotsiologicheskie issledovaniya* [Sociological Studies], 2010, no. 1, pp. 142–145.
3. Abrukov V.S., Efremov L.G., Koshcheev I.G. *Vozможности sozdaniya sistemy podderzhki prinyatiya reshenii i upravleniya vuzom s pomoshch'yu analiticheskoi platformy deductor* [Opportunities to create a decision support and university management system by means of analytical platform deductor]. *Integratsiya obrazovaniya* [Integration of education], 2013, no. 1(70), pp. 17–23.
4. Abrukov V.S., Efremov L.G., Koshcheev I.G. *Novye podkhody k razrabotke modelei sistemy podderzhki prinyatiya reshenii i upravleniya vuzom* [New approaches to working out of decision making support system and higher education institutions management models]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2013, no. 1, pp. 224–228.
5. Abrukov V.S., Abrukov S.V., Smirnov A.V., Karlovich E.V. *Metody intellektual'nogo analiza dannykh pri sozdanii baz znaniy* [Data Mining Techniques as means of creating knowledge bases]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2015, no. 1, pp. 140–146.
6. Arzamastsev A.A., Zenkova N.A. *Modelirovanie v psikhologii na osnove iskusstvennykh neironnykh setei* [Modeling in psychology based on artificial neural networks]. Tambov, 2003.
7. Barabanshchikov V.A. *Sistemnyi podkhod v strukture psikhologicheskogo poznaniya* [A systematic approach in the structure of psychological knowledge]. *Metodologiya i istoriya psikhologii* [Methodology and history of psychology], 2007, vol. 2, iss. 1, pp. 86–99.
8. Vorob'ev A.V. *Obzor primeneniya matematicheskikh metodov pri provedenii psikhologicheskikh issledovaniy* [The review of mathematical methods application in psychological researches]. *Psikhologicheskie issledovaniya* [Psychological Studies], 2010, no. 2(10). URL: <http://psysudy.ru/index.php/num/2010n2-10/311-vorobiev10.html>.
9. Slavutskaya E.V. *Issledovanie vzaimosvyazi emotsional'no-volevykh kachestv s intellektom i dezadaptatsiei shkol'nikov 9-11 let: dis. ... kand. psikhol. nauk* [The study of the interrelationship of emotional and volitional qualities with intelligence and maladjustment schoolchildren 9-11 years: Doct. Diss.]. Kazan, 2000, 185 p.
10. Slavutskaya E.V. *Ekspериментал'noe izuchenie gendernykh razlichii v razvitiy emotsional'no-volevykh i intellektual'nykh svoystv mladshikh podrostkov* [Experimental researches of gender features development of younger teenagers emotionally-volitional and intellectual qualities]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* [Tomsk State Pedagogical University Bulletin], 2009, iss. 9(87), pp. 127–129.
11. Slavutskaya E.V., Abrukov V.S., Slavutskii L.A. *Intellektual'nyi analiz dannykh psikhodiagnostiki shkol'nikov predpodrostkovogo vozrasta* [Data Mining of the younger adolescents psychodiagnostic results]. *Vestnik Chuvashskogo universiteta*, 2012, no. 3, pp. 226–232.
12. Slavutskaya E.V., Slavutskii L.A. *Neirosetevoi analiz vzaimosvyazi verbal'nogo i neverbal'nogo intellekta mladshikh podrostkov* [Neural network analysis of the relationship of verbal and

nonverbal intelligence of younger adolescents]. *Psikhologicheskii zhurnal* [Psychological Journal], 2014, vol. 35, no. 5, pp. 48–56.

13. Slavutskaya E.V., Slavutskii L.A. *Prepodrostkovyi vozrast: formirovanie svyazei v strukture lichnosti* [Preadolescent age: the formation of the interconnections in the personality structure]. *Psikhologicheskie issledovaniya* [Psychological Studies], 2014, vol. 7, no. 37. URL: <http://psystudy.ru/index.php/num/2014v7n37/1040-slavutskaya37.html>.

14. Slavutskaya E.V., Slavutskii L.A. *Ispol'zovanie iskusstvennykh neironnykh setei dlya analiza gendernykh razlichii mladshikh podrostkov* [Using of the artificial neural networks for the analysis of the younger teenager's gender differences]. *Psikhologicheskie issledovaniya* [Psychological Studies], 2012, vol. 5, no. 23. URL: <http://psystudy.ru/index.php/num/2012v5n23/684-slavutskaya23.html>.

15. Haykin S. *Neural networks. A comprehensive Foundation*. 2nd ed. New Jersey, Prentice Hall, 1999 (Russ. ed.: *Neironnye seti: polnyi kurs*. 2nd ed. Moscow, Vil'yams Publ., 2006).

16. Shendypin V.N., Skotnikova I.G., Barabanshchikov V.A., Tarasov V.B. *Matematischeskoe modelirovanie uverenosti pri prinyatii resheniya v sensorykh zadachakh* [Mathematical modeling of the confidence in decision making in sensory tasks]. *Psikhologicheskii zhurnal* [Psychological Journal], 2008, vol. 29, no. 4, pp. 84–97.

17. Abrukov V.S., Karlovich E.V., Afanasyev V.N., Semenov Y.V., Abrukov S.V. *Creation of propellant combustion models by means of data mining tools. International Journal of Energetic Materials and Chemical Propulsion*, 2010, vol. 9, no. 5, pp. 385–396.

18. Baxt W.G. *Complexity, chaos and human physiology: the justification for non-linear neural computational analysis. Cancer Lett.*, 1994, vol. 77, no. 2-3, pp. 85–93.

19. Cattell R. B. *Advanced in Cattellian Personality Theory. Handbook of Personality. Theory and Research*. New York, The Guilford Press, 1990.

20. Reznichenko N.S., Shilov S.N., Abdulkin V.V. *Neuron Network Approach to the Solution of the Medical-Psychological Problems and in Diagnosis Process of Persons with Disabilities (Literature Review). Journal of Siberian Federal University. Humanities & Social Sciences*, 2013, vol. 9(6), pp. 1256–1264.

21. Hebb D. *Organization of behavior*: New York, Science Edition, 1961.

SLAVUTSKAYA ELENA – Candidate of Psychological Sciences, Associated Professor of Psychology and Social Pedagogic Department, Chuvash State Pedagogical University, Russia, Cheboksary.

ABRUKOV VICTOR – Doctor of Physics and Mathematical Sciences, Professor of Applied Physics and Nanotechnology Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

SLAVUTSKII LEONID – Doctor of Physics and Mathematical Sciences, Professor, Department of Automatics and Control in Technical Systems, Chuvash State University, Russia, Cheboksary.

Ссылка на статью: Славутская Е.В., Аbruchов В.С., Славутский Л.А. Нейросетевой системный анализ уровневых психологических характеристик // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 164–173.

УДК 517.912:519.6

ББК В161.6:В192.1

В.Х. ФЕДОТОВ, Н.В. НОВОЖИЛОВА

ВЫСОКОТОЧНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: математическое моделирование, численное интегрирование дифференциальных уравнений, высокоточный численный метод решения задачи Коши, динамические процессы в областях науки и техники, численные методы, компьютерные вычисления, сложные технические системы.

Точность численного интегрирования дифференциальных уравнений зависит от малоизученных законов алгебры приближенных вычислений – погрешностей методов, дискретизации, устойчивости разностных схем и др. Как следствие, на каждой итерации решается задача, отличная от предыдущей, что приводит к накоплению ошибки расчета (эффект «сползания»). В работе описан и апробирован простой высокоточный численный метод решения задачи Коши без использования высших производных и с минимальным эффектом «сползания».

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) часто используются в качестве математических моделей сложных динамических процессов в различных областях науки и техники. При этом, как правило, эти уравнения не решаются аналитически, а исследуются с помощью различных численных методов.

Рассмотрим задачу Коши для системы ОДУ

$$y' \equiv dy/dt = f(y(t), t), y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

где $y(t) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ – вектор зависимых переменных; y_0 – начальное значение; t – независимая переменная (время); t_0 – начальный момент времени (начало эволюции); f – известная (заданная) функция.

Задача Коши в общем виде не имеет точного решения в квадратурах [3]. Численные методы решения основаны на различных разностных схемах, представляющих собой конечное приближение бесконечного ряда, аппроксимирующего функцию $y(t)$. Чем выше порядок приближения, тем, как правило, ниже погрешность метода (увеличения порядка приближения не обязательно снижает погрешность). Все применяемые на практике численные методы без используют высшие производные и характеризуются погрешностью порядка $\sim O(\varepsilon^5)$, где $\varepsilon \ll 1$.

Целью данной работы является построение простого численного метода решения задачи Коши с минимальной погрешностью без использования высших производных.

Численные методы решения систем ОДУ включают одношаговые (методы Эйлера, методы Рунге – Кутты), многошаговые (методы Адамса), адаптивные с автоматическим выбором шага и др., модифицированные (прогноза и коррекции), а также их комбинации [2]. Предлагаемый ниже метод можно отнести к модификациям одношаговых методов Эйлера или методам прогноза и коррекции.

Одномерные системы. Рассмотрим вначале одномерный вариант. Одношаговые методы являются простейшим способом численного интегрирования ОДУ, основанным на аппроксимации непрерывной и бесконечно-

дифференцируемой функции $y(t)$, конечным числом p членов бесконечного ряда Тейлора в малой окрестности начального приближения [3]

$$y(t_0+h) \approx y(t_0) + y'(t_0)h + y''(t_0)h^2/2! + y'''(t_0)h^3/3! + \dots + y^{(p)}(t_0)h^p/p!, \quad (2)$$

где h – шаг (предполагается постоянным).

Это предположение не существенно для целей данной работы и не нарушает общности анализа, так как нас интересует точность вычислений, но не их скорость. Погрешность формулы (2) (остаток порядка p) определяется бесконечным, вообще говоря, рядом

$$R_p(h) = y^{(p+1)}(t_0)h^{p+1}/(p+1)! + y^{(p+2)}(t_0)h^{p+2}/(p+2)! + \dots \sim o(h^p) \sim O(h^{p+1}), \quad (3)$$

где $O(h^{p+1})$ обозначает бесконечно малую порядка $p+1$, т.е. $\leq Ch^{p+1}$ ($C \sim 1$), а $o(h^p)$ – бесконечно малую более высокого порядка, чем p , т.е. $\leq \varepsilon h^{p+1}$ ($\varepsilon \ll 1$).

Основной вклад в эту погрешность в случае общего положения вносит первое слагаемое, зависящее от $(p+1)$ -й производной в точке t_0 и шага h . Сумма остальных образует погрешность порядка малости $p+2$ и т.д.

При разработке алгоритмов численных вычислений аналитические соотношения представляют в виде дискретных итерационных формул. Подставляя в (2) вместо y' ее известное значение f из (1) с учетом (3) при $p=1$, получим обобщенную разностную формулу первого порядка:

$$y_{n+1} = y_n + h y'(t_n) + R_1(h) \approx y_n + h f(y_n, t_n) + R_{1,n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где y_n – значение на предыдущей итерации; y_{n+1} – значение на следующей итерации; $R_{1,n}$ – локальная ошибка на текущей итерации; $0 < h \ll 1$ – шаг разностной схемы.

В этом случае основной вклад в погрешность вносит вторая производная в точке t_n . При $R_1(h) = 0$ из (4) следует классический метод Эйлера первого порядка, для которого локальная ошибка максимальна $R_{1,n} = R_{\text{Эйлера}} \sim O(h^2)$.

На практике погрешность итерационных формул вида (4) зависит от малоизученных законов алгебры приближенных вычислений (нарушение коммутативности и др.) [5] – локальной ошибки метода (на данной итерации), ошибок дискретизации (округлений, отсечений), устойчивости разностных схем и др. Их следствием является то, что вычисление y_{n+1} для каждой итерации фактически означает решение задачи Коши, отличной от предыдущей, так как представляет собой линию семейства кривых $y(t, C)$ с началом в точке y_n . Этот эффект «сползания» может привести к накоплению больших глобальных ошибок $R(h) \equiv \sum R_p(h)$ на всем интервале интегрирования. Например, глобальная ошибка метода Эйлера на порядок выше локальной $R(h) \sim O(h)$ [5]. Бесконечный остаток $R_p(h)$ в соотношении (3) является ошибкой метода, а его конечное приближение $R_{1,n}$ в (4) является ошибкой дискретизации. Они близки, но не равны и обе «немного» отличаются от неизвестной (истинной, точной) локальной ошибки E_n решения исходной задачи Коши (1), так как не известно ее точное решение $y(t_n)$. Критерий высокой точности численного решения задачи Коши запишем в виде задачи нелинейной минимизации локальной ошибки на интервале $[t_{m+1}, t_n]$:

$$R_{1,n} \approx E_n \equiv |y_{n+1} - y(t_n)| \rightarrow \min. \quad (5)$$

Соотношения (4), (5) за счет выбора разных способов оценки остатка позволяют конструировать алгоритмы численного интегрирования различной точности. Например, оценка остатка в форме Шлёмилха – Роша использует значение

второй производной внутри отрезка (t_{m+1}, t_n) . Ее частными случаями являются оценки Лагранжа – Коши [4]

$$R_{1,n} \approx R_{\text{Лагранж}} = y''(\theta_n)h^2/2 \approx R_{\text{Коши}} = y''(\theta_n)(1-\theta_n)h^2 \sim O(h^2), \quad (6)$$

где $\theta_n \equiv t_n + \alpha_n h$, $0 < \alpha_n < 1$.

Позднее Пеано получил оценку $R_{\text{Пеано}} = \beta_n h^2/2 \sim o(h^2)$, где $\beta_n \equiv \beta_n(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ – неизвестная функция [4. С. 295], которая еще неопределеннее. Примерно в это же время Рунге [1] предложил, по-видимому, наиболее простую оценку

$$R_{1,n} \approx R_{\text{Рунге}} = Ch^p y^{p-1}(\theta_n) \sim O(h^p), \quad (7)$$

где C – константа.

Эти оценки используют значения высших производных в неопределенных точках и являются разновидностями теорем о среднем [3], которые недостаточно конструктивны. Если высшие производные можно найти из условий задачи (1) через полные дифференциалы $y'' = f_y f + f_t$, $y''' = f_{yy} f^2 + f_y^2 + f_{tt}$, то α_n , θ_n , β_n остаются неизвестными¹.

Найдем более точные и конструктивные формы оценки $R_{1,n}$, не использующие высшие производные. Рассмотрим поведение $y(t)$ вблизи точки t_n . Локально любую непрерывную и дифференцируемую функцию можно считать монотонной (не обязательно строго). Возможные случаи:

- 1) $y(t)$ выпукла вниз (лежит над касательной);
- 2) $y(t)$ выпукла вверх (лежит под касательной);
- 3) $y(t)$ имеет перегиб (лежит по разные стороны от касательной). Рассмотрим их подробнее.

Случай 1. Пусть функция $y(t)$ на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ лежит над касательной (выпукла вниз, $y'(t_n) \neq 0$, $y''(t_n) > 0$). Тогда метод Эйлера на каждой итерации занижает значение y_{n+1} по сравнению с точным значением $y(t_n)$ на неизвестную величину $E = |y_{n+1} - y(t_n)| \approx R_{1,n}$. Оценим ее через первые производные, значения которых $y'(t_n) = f(t_n)$ для задачи Коши известны в любой предыдущей точке. Очевидно, что грубой оценкой является разность между двумя последовательными приближениями $R_{1,n} < |y_{n+1} - y_n| = h|y'(t_n)|$. Модули учитывают знак производной $\text{sign } y'(t_n) \neq 0$, который может быть любым. Улучшим оценку за счет неизвестного значения первой производной на правом конце t_{n+1} интервала $R_{1,n} < h|y'(t_n)| < h|y'(t_{n+1})|$. Эту оценку можно улучшить за счет другого значения первой производной в точке $\theta_n \equiv t_n + \alpha_n(t_{n+1} - t_n) = t_n + \alpha_n h = \alpha_n t_{n+1} + (1 - \alpha_n)t_n$, $0 < \alpha_n < 1$, расположенной немного левее $\alpha_n = 1 - \varepsilon$ правого конца интервала $R_{1,n} < h|f(\theta_n)|$. Понятно, что улучшение можно продолжать, сдвигаясь еще левее. При этом внутри интервала должно существовать неизвестное оптимальное значение θ_n^* , обеспечивающее минимум ошибки E_n (разновидность теорем о среднем) [3]

$$h \min |f(t_n + \alpha_n^* h)| \leq R_{\text{оптим}} \approx h |y'(\theta_n^*)| \leq h \max |f(t_n + \alpha_n^* h)|, \quad (8)$$

где $\theta_n^* \equiv t_n + \alpha_n^* h$ – оптимальное значение; $0 < \alpha_n^* < 1$ – коэффициент оптимальной точности.

¹ *Примечание.* Теорема о среднем [1, 4]. Если функция $f(t)$ непрерывна и дифференцируема на (a, b) , то существует такое число θ , что $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$, где $\theta \equiv a + \alpha(b - a)$, $0 < \alpha < 1$.

Оценка (8) в отличие от (6) использует только первую производную. Наиболее близкой к (8) является оценка Рунге (7), использующая производные на единицу меньшего порядка, включая и первый. Отличие (8) от (7) состоит в том, что она вообще не зависит от производных высших порядков.

Чтобы сделать оценку (8) конструктивной, зададим алгоритм вычисления $y'(\theta_n^*)$. Проще всего это сделать с помощью линейной $y'(\theta_n^*) \approx \alpha_n^* y'(t_n) + \gamma_n$, квадратичной или кубической интерполяции [3]. Для линейной интерполяции при $\gamma_n = 0$ соотношение (4) с учетом (8) запишется в виде оптимизированного алгоритма Эйлера

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\approx y_n + hy_n' + R_{\text{оптим}} = y_n + hy_n' + \alpha_n \cdot hy_n' = \\ &= y_n + h(1 + \alpha_n^*)y_n', \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Критерием точности выберем разность между интерполированным значением и нужным числом членов остатка. Для определения нужного числа членов остатка $R_p(h)$ зададим желаемую точность $\sim O(h^k)$. Тогда критерий (5) запишется в виде полиномиального уравнения, корни которого дают оптимальные значения α_n^* :

$$E_n \approx R_{\text{оптим}} - R_k(h) \approx h[\alpha_n^* |y_n'| - \sum y^{(p+1)}_n h^p / (p+1)!] = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots, k-1. \quad (5')$$

Для линейной интерполяции, соответственно, получим единственное оптимальное значение

$$\alpha_n^* = \sum y^{(p+1)}_n h^p / [(p+1)! |y_n'|], \quad p = 1, 2, 3, \dots, k-1. \quad (10)$$

Чтобы обеспечить точность $\sim O(h^2)$, полагаем $k = 2$, т.е. $p = 1$, и из (10) получим $\alpha_n^* = y''_n h / (2|y_n'|)$. Чтобы обеспечить точность $\sim O(h^3)$, полагаем $k = 3$ и из (10) получим $\alpha_n^* = [y''_n h / 2 + y'''_n h^2 / 6] / |y_n'|$ и т.д. Отметим, что критерий точности (5) в отличие от самого метода (9) использует производные высших порядков. Однако практика показывает, что достаточно применить его один раз на первом (самом грубом) шаге. В численных вычислениях критерием точности обычно считают абсолютную величину разности двух последовательных приближений $\Delta_n \equiv |y_{n+1} - y_n|$, которая легко вычисляется, но отличается от истинной погрешности E_n и может неверно оценивать реальные ошибки вычислений. Критерий (5') в этом смысле, конечно, объективнее.

Возможны и другие способы определения оптимального значения α_n^* . Если разложить в ряд не само решение, а производную $y'(t_0+h) \approx y'(t_0) + y''(t_0)h + y'''(t_0)h^2/2! + \dots$ и вновь применить линейное приближение, то получим рекуррентное соотношение $f_{n+1} \approx f_n + f'_n h$ для вычисления первой производной решения на конце интервала. С его помощью получаем уравнение касательной в конце интервала. Затем параллельно переносим ее в начало интервала. Полученная линия представляет собой секущую, проходящую через начало интервала, но выше его конца. Точка ее пересечения (t^*, y^*) с вертикалью $t = t_{n+1}$ дает уточнение верхней оценки (8) $R_{\text{оптим}} \approx h|y'(\theta_n^*)| \leq h|f(t^*)|$.

Простейшими методами определения α_n^* являются перебор и различные эвристики. Например, для простейшей эвристики «среднего» $\alpha_{\text{средн}} = 1/2$ и оценка (8) запишется

$$R_{1,n} \approx R_{\text{среднее}} = 0,5h|y'_n|. \quad (11)$$

Для эвристики «золотого» сечения $1/\alpha = \alpha/(1 - \alpha)$ существуют два симметричных значения $\alpha_{\text{золот}} \approx 0,382$, $1 - \alpha_{\text{золот}} \approx 0,618$ и два варианта записи оценки (8) $R_{\text{золото1}} = 0,382h|y'_n|$, $R_{\text{золото2}} = 0,618h|y'_n|$. Сравним найденные модификации метода Эйлера с точными значениями, оценкой Лагранжа и методами Эйлера первого (Эйлер1) и второго (Эйлер2) порядка.

Пример 1. Решим задачу Коши для уравнения $y' = ay$ при $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ на отрезке $[0, h]$ для разных h . Ее точным решением является функция $y(t) = e^{at}$, которая выпукла вниз (лежит над касательной) и зависит от числа a . При $a < 0$ решение и ошибки затухают, при $a > 0$ – неограниченно возрастают. Пусть $a = -10$ (устойчивый случай). Расчет по методу Эйлера1 дает сильно заниженное значение $y_{\text{Эйлер}} = 0,0$. Расчет по методу Эйлера2 требует вычисления второй производной $y'' = f_{yy} + f_t = a^2y$, но дает завышенное значение. Оценка Лагранжа также требует расчета второй производной и неизвестного значения α_n , например $\alpha_n = 1/2$. Оптимизированные модификации метода Эйлера проще и точнее (табл. 1–4).

Таблица 1

Точность модификаций метода Эйлера
для уравнения $y' = ay$ при $h = 0,1$, $a = -10$ ($y_0 = 1$)

t	Точно	Эйлер1	Ошибка	Лагранж	Ошибка	Эйлер2	Ошибка	Среднее	Ошибка	Золото1	Ошибка	Золото2	Ошибка	Оптимальный	Ошибка
0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,000000
0,10	0,37	0,00	-0,37	0,25	-0,12	0,50	0,13	0,50	0,13	0,38	0,01	0,62	0,25	0,37	0,000021
0,20	0,14	0,00	-0,14	0,06	-0,07	0,25	0,11	0,25	0,11	0,15	0,01	0,38	0,25	0,14	0,000015
0,30	0,05	0,00	-0,05	0,02	-0,03	0,13	0,08	0,13	0,08	0,06	0,01	0,24	0,19	0,05	0,000008
0,40	0,02	0,00	-0,02	0,00	-0,01	0,06	0,04	0,06	0,04	0,02	0,00	0,15	0,13	0,02	0,000004
0,50	0,01	0,00	-0,01	0,00	-0,01	0,03	0,02	0,03	0,02	0,01	0,00	0,09	0,08	0,01	0,000002
0,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,01	0,02	0,01	0,00	0,00	0,06	0,05	0,00	0,000001
Глобальная ошибка			-0,58		-0,25		0,40		0,40		0,04		0,95		0,000005

По строке 2 видно, что наименьшую локальную ошибку на первом шаге дают методы золотого сечения $E_{\text{золото1}} = 0,01 \sim O(h^2)$ и оптимальный $E_{\text{оптим}} = 0,00002 \sim O(h^5)$, полученные при значении $\alpha_{\text{оптим}} \approx 0,3679$, найденном бисекцией. Оптимальное значение по формуле (10) для $p = 1$ равно $\alpha_n^* = -ah/2 = 1/2$, что совпадает с модификацией среднего.

Для $p = 2$

$$\alpha_n^* = -ah/2 + a^2h^2/6 = 1/2 - 1/6 = 1/3.$$

Для $p = 3$

$$\alpha_n^* = -ah/2 + a^2h^2/6 - a^3h^3/24 = 1/3 + 1/24 = 9/24 \approx 0,375.$$

Для $p = 4$

$$\begin{aligned} \alpha_n^* &= -ah/2 + a^2h^2/6 - a^3h^3/24 + a^4h^4/120 = 1/3 + 1/24 = \\ &= 9/24 - 1/120 = 44/120 \approx 0,366667. \end{aligned}$$

Для $p = 5$

$$\begin{aligned} \alpha_n^* &= -ah/2 + a^2h^2/6 - a^3h^3/24 + a^4h^4/120 - a^5h^5/720 = \\ &= 44/120 + 1/720 = 265/720 = 0,368056. \end{aligned}$$

Для $p = 6$

$$\alpha_n^* = -ah/2 + a^2h^2/6 - a^3h^3/24 + a^4h^4/120 - a^5h^5/720 + a^6h^6/5040 = \\ = 265/720 - 1/5040 = 0,367857 \approx \alpha_{\text{оптим}}.$$

Это значение обеспечивает нужную точность.

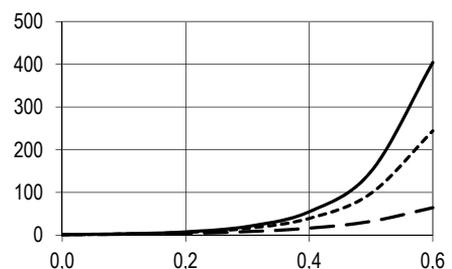
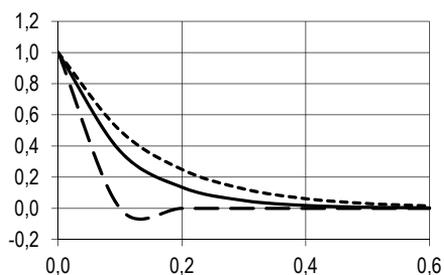
Ошибка метода «Среднее» $E_{\text{среднее}} = 0,4 \sim O(h)$, который также не использует вторую производную, сравнима с ошибками по Лагранжу и методу Эйлера второго порядка. Наименьшую глобальную ошибку дал также оптимальный метод, даже без пересчета оптимального значения на каждом шаге. Если на каждом шаге пересчитывать значения $\alpha_{\text{оптим}}$, то результаты будут еще точнее. Для $a = 10$ (неустойчивый случай) оценки приведены в табл. 2.

Таблица 2

Точность модификаций метода Эйлера
для уравнения $y' = ay$ при $h = 0.1$, $a = +10$ ($y_0 = 1$)

t	Точно	Эйлер	Ошибка	Лагранж	Ошибка	Эйлер2	Ошибка	Среднее	Ошибка	Золото1	Ошибка	Золото2	Ошибка	Оптимальный	Ошибка
0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,000000
0,10	2,72	2,00	-0,72	2,25	-0,47	2,50	-0,22	2,50	-0,22	2,38	-0,34	2,62	-0,10	2,72	0,000718
0,20	7,39	4,00	-3,39	5,06	-2,33	6,25	-1,14	6,25	-1,14	5,67	-1,72	6,85	-0,54	7,39	0,003905
0,30	20,09	8,00	-12,09	11,39	-8,69	15,63	-4,46	15,63	-4,46	13,52	-6,57	17,94	-2,14	20,10	0,015926
0,40	54,60	16,00	-38,60	25,63	-28,97	39,06	-15,54	39,06	-15,54	32,19	-22,40	46,98	-7,62	54,66	0,057730
0,50	148,41	32,00	-116,41	57,67	-90,75	97,66	-50,76	97,66	-50,76	76,68	-71,73	122,98	-25,43	148,61	0,196185
0,60	403,43	64,00	-339,43	129,75	-273,68	244,14	-159,29	244,14	-159,29	182,66	-220,77	321,97	-81,46	404,07	0,640028
Глобальная ошибка			-510,63		-404,89		-231,40		-231,40		-323,52		-117,29		0,915

По строке 2 видно, что наименьшую ошибку теперь дают вторая модификация метода золотого сечения $E_{\text{золото2}} = -0,1 \sim O(h)$ и оптимальный метод $E_{\text{оптим}} = 0,0007 \sim O(h^4)$ при значении $\alpha_{\text{оптим}} \approx 0,7190001$. Графические иллюстрации приведены на рис. 1.



а

б

Рис. 1. Точность модификаций метода Эйлера:
а – для уравнения $y' = at$ при $a = -10$, $h = 0.1$, $y_0 = 1$;
б – для уравнения $y' = at$ при $a = +10$, $h = 0.1$, $y_0 = 1$

Расчеты для меньших значений шага приведены ниже.

Таблица 3

Точность модификаций метода Эйлера
для уравнения $y' = ay$ при $h = 0.01$, $a = -10$ ($y_0 = 1$)

t	Точно	Эйлер	Ошибка	Лагранж	Ошибка	Эйлер2	Ошибка	Среднее	Ошибка	Золото1	Ошибка	Золото2	Ошибка	Оптимальный	Ошибка
0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00000	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00000
0,01	0,90	0,90	0,00	0,90	0,00	0,91	0,00016	0,95	0,05	0,94	0,03	0,96	0,06	0,90	0,000063
0,10	0,37	0,35	-0,02	0,36	-0,01	0,37	0,00066	0,60	0,23	0,53	0,16	0,68	0,31	0,37	0,000255
0,20	0,14	0,12	-0,01	0,13	-0,01	0,14	0,00049	0,36	0,22	0,28	0,14	0,46	0,32	0,14	0,000187
0,30	0,05	0,04	-0,01	0,05	0,00	0,05	0,00027	0,21	0,16	0,15	0,10	0,31	0,26	0,05	0,000103
0,40	0,02	0,01	0,00	0,02	0,00	0,02	0,00013	0,13	0,11	0,08	0,06	0,21	0,19	0,02	0,000051
0,50	0,01	0,01	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00006	0,08	0,07	0,04	0,03	0,14	0,14	0,01	0,000023
0,51	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00006	0,07	0,07	0,04	0,03	0,14	0,13	0,01	0,000022
0,52	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00005	0,07	0,06	0,04	0,03	0,13	0,13	0,01	0,000020
0,53	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00005	0,07	0,06	0,03	0,03	0,13	0,12	0,01	0,000018
0,54	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00004	0,06	0,06	0,03	0,03	0,12	0,12	0,00	0,000017
Глобальная ошибка			-0,01		-0,01		0,0004		0,47		0,23		0,92		0,000153

Оптимальное значение $\alpha_{\text{оптим}} \approx 0,049$ обеспечивает на втором шаге $E_{\text{оптим}} = 0,00006 \sim O(h^3)$ и глобальную точность $E_{\text{оптим}} = 0,0001 \sim O(h^2)$.

Таблица 4

Точность модификаций метода Эйлера
для уравнения $y' = ay$ при $h = 0.01$, $a = +10$ ($y_0 = 1$)

t	Точно	Эйлер	Ошибка	Лагранж	Ошибка	Эйлер2	Ошибка	Среднее	Ошибка	Золото1	Ошибка	Золото2	Ошибка	Оптимальный	Ошибка
0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00000
0,01	1,11	1,10	-0,01	1,10	0,00	1,10	0,00	1,15	0,04	1,14	0,03	1,16	0,06	1,11	0,000001
0,10	2,72	2,59	-0,12	2,65	-0,06	2,65	-0,06	4,05	1,33	3,65	0,93	4,48	1,76	2,72	0,000027
0,20	7,39	6,73	-0,66	7,04	-0,35	7,04	-0,35	16,37	8,98	13,32	5,93	20,07	12,68	7,39	0,000145
0,30	20,09	17,45	-2,64	18,68	-1,41	18,68	-1,41	66,21	46,13	48,59	28,51	89,94	69,85	20,09	0,000590
0,40	54,60	45,26	-9,34	49,56	-5,04	49,56	-5,04	267,86	213,27	177,31	122,72	402,95	348,36	54,60	0,002138
0,50	148,41	117,39	-31,02	131,50	-16,91	131,50	-16,91	1083,66	935,24	647,04	498,62	1805,38	1656,97	148,42	0,007265
0,51	164,02	129,13	-34,89	144,98	-19,04	144,98	-19,04	1246,21	1082,18	736,46	572,44	2097,49	1933,47	164,03	0,008189
0,52	181,27	142,04	-39,23	159,84	-21,43	159,84	-21,43	1433,14	1251,86	838,24	656,96	2436,86	2255,59	181,28	0,009228
0,53	200,34	156,25	-44,09	176,22	-24,11	176,22	-24,11	1648,11	1447,77	954,08	753,74	2831,15	2630,81	200,35	0,010395
0,54	221,41	171,87	-49,53	194,29	-27,12	194,29	-27,12	1895,32	1673,92	1085,93	864,53	3289,23	3067,82	221,42	0,011705
Глобальная ошибка			-250,83		-136,96		-136,96		7896,89		4158,42		14180,35		0,058934

Оптимальное значение $\alpha_{\text{оптим}} \approx 0,05172$ обеспечивает на втором шаге $E_{\text{оптим}} = 0,000001 \sim O(h^3)$ и высокую глобальную точность.

Случай 2. Если функция $y(t)$ лежит под касательной (выпукла вверх, $y'(t_n) \neq 0$, $y''(t_n) < 0$), то все происходит с точностью до «наоборот». На каждой итерации метод Эйлера завышает значение y_{n+1} по сравнению с точным $y(t_n)$ на ту же величину, и в алгоритме (9) нужно поменять знак перед α_n^*

$$y_{n+1} \approx y_n + h(1 - \alpha_n^*)y_n', \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9')$$

Для удобства записи соотношения (9) и (9') можно записать в форме одного общего алгоритма

$$y_{n+1} \approx y_n + h(1 + \text{sign}(y_n'')\alpha_n^*)y_n', \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Заметим, что в этой форме он также использует вторую производную. Этого, однако, тоже можно избежать, если заменить точные признаки выпуклости на менее точные эвристические алгоритмы.

Пример 2. Рассмотрим то же уравнение $y' = at$ с отрицательным начальным условием. Тогда функция, представляющая собой точное решение, выпукла вверх (лежит под касательной), табл. 5–6.

Таблица 5

Точность модификаций метода Эйлера
для уравнения $y' = ay$ при $h = 0.1, a = -10 (y_0 = -1)$

t	Точно	Эйлер1	Ошибка	Лагранж	Ошибка	Эйлер2	Ошибка	Среднее	Ошибка	Золото1	Ошибка	Золото2	Ошибка	Опти-мальный	Ошибка
0,00	1,00	-1,00		-1,00		-1,00		-1,00		-1,00		-1,00		-1,00	
0,10	-0,37	0,00	0,37	-0,25	0,12	-0,50	-0,13	-0,50	-0,13	-0,38	-0,01	-0,62	-0,25	-0,37	-0,000021
0,20	-0,14	0,00	0,14	-0,06	0,07	-0,25	-0,11	-0,25	-0,11	-0,15	-0,01	-0,38	-0,25	-0,14	-0,000015
0,30	-0,05	0,00	0,05	-0,02	0,03	-0,13	-0,08	-0,13	-0,08	-0,06	-0,01	-0,24	-0,19	-0,05	-0,000008
0,40	-0,02	0,00	0,02	0,00	0,01	-0,06	-0,04	-0,06	-0,04	-0,02	0,00	-0,15	-0,13	-0,02	-0,000004
0,50	-0,01	0,00	0,01	0,00	0,01	-0,03	-0,02	-0,03	-0,02	-0,01	0,00	-0,09	-0,08	-0,01	-0,000002
0,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,02	-0,01	-0,02	-0,01	0,00	0,00	-0,06	-0,05	0,00	-0,000001
Глобальная ошибка			0,58			0,25		-0,40		-0,40		-0,04		-0,95	-0,00005

Как видно, сравнительные характеристики точности методов не изменились. Наилучшие результаты, по-прежнему, показывает оптимальный метод $E_{\text{оптим}} = 0,00002 \sim O(h^5)$ при значении $\alpha_{\text{оптим}} \approx 0,3679$, что совпадает с результатами табл. 1, полученными для такого же шага.

Таблица 6

Точность модификаций метода Эйлера
для уравнения $y' = -ay$ при $h = 0.1, a = +10 (y_0 = 1)$

t	Точно	Эйлер	Ошибка	Лагранж	Ошибка	Эйлер2	Ошибка	Среднее	Ошибка	Золото1	Ошибка	Золото2	Ошибка	Опти-мальный	Ошибка
0,00	1,00	-1,00		-1,00		-1,00		-1,00		-1,00		-1,00		-1,00	
0,10	-2,72	-2,00	0,72	-2,25	0,47	-2,50	0,22	-2,50	0,22	-2,38	0,34	-2,62	0,10	-2,72	-0,000718
0,20	-7,39	-4,00	3,39	-5,06	2,33	-6,25	1,14	-6,25	1,14	-5,67	1,72	-6,85	0,54	-7,39	-0,003905
0,30	-20,09	-8,00	12,09	-11,39	8,69	-15,63	4,46	-15,63	4,46	-13,52	6,57	-17,94	2,14	-20,10	-0,015924
0,40	-54,60	-16,00	38,60	-25,63	28,97	-39,06	15,54	-39,06	15,54	-32,19	22,40	-46,98	7,62	-54,66	-0,057722
0,50	-148,41	-32,00	116,41	-57,67	90,75	-97,66	50,76	-97,66	50,76	-76,68	71,73	-122,98	25,43	-148,61	-0,196158
0,60	-403,43	-64,00	339,43	-129,75	273,68	-244,14	159,29	-244,14	159,29	-182,66	220,77	-321,97	81,46	-404,07	-0,639939
Глобальная ошибка			510,63		404,89		231,40		231,40		323,52		117,29		-0,914366

Как видно, наилучшие результаты по-прежнему показывает оптимальный метод $E_{\text{оптим}} = 0,0007 \sim O(h^4)$ при значении $\alpha_{\text{оптим}} \approx 0,7190001$, что совпадает с данными табл. 2.

Случай 3. Пусть функция $y(t)$ имеет перегиб (лежит по разные стороны от касательной, $y'(t_n) \neq 0, y''(t_n) = 0$). Обращение второй производной в нуль – необходимое, но не достаточное условие перегиба [4. С. 341]. Тогда справа и слева от точки перегиба решение лежит над касательной (для четных функций) и под касательной (для нечетных функций). Для прямого времени (эволюция вперед) определяющим является поведение справа (для обратного

времени – слева). Для этого вырожденного, но не типичного случая алгоритм (12) можно скорректировать так:

$$y_{n+1} \approx y_n + h(1 + \text{sign}(y''(y_n + h/2))\alpha_n^*)y_n', \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12')$$

Анализ показал, что точность найденных модификаций метода Эйлера (8)–(12) превосходит и высокоточные методы, например Рунге – Кутта, имеющего, как известно, порядок точности $\sim O(h^5)$.

Многомерные системы. Все приведенные рассуждения обобщаются на многомерный случай, т.е. на системы ОДУ, аналогично классическим многомерным методам Эйлера. При этом скалярное соотношение (13) следует рассматривать в векторной форме

$$y_{n+1,i} \approx y_{n,i} + h(1 + \text{sign}(y_{n,i}'')\alpha_n^*)y_{n,i}', \quad n = 0, 1, 2, \dots; i = 1, \dots, k. \quad (13)$$

Рассмотрим примеры применения модификации метода Эйлера (13) для многомерных систем.

Пример 3. Модель эволюции 1) $X_3 = X_1$, 2) $X_1 = X_2$, 3) $X_2 + 2X_3 = 3X_1$ описывается системой двух дифференциальных уравнений (простейший осциллятор [6])

$$\begin{aligned} x_1' &= \omega_1(1 - x_1 - x_2) - \omega_{-1}x_1 - \omega_2x_1 + \omega_{-2}x_2, \\ x_2' &= \omega_2x_1 - \omega_{-2}x_2 - \omega_3x_2(1 - x_1 - x_2)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Анализ показал, что динамика этой системы может быть монотонной, колебательной (затухающей и незатухающей), т.е. сочетает участки выпуклости вверх (лежат под касательной) и вниз (лежат над касательной). Равновесных состояний может быть три или одно. Если равновесие единственное и неустойчивое, то в системе возникают незатухающие колебания (автоколебания). Например, при $\omega_1 = 2.89$, $\omega_{-1} = 0.01$, $\omega_2 = 3/89$, $\omega_{-2} = 0.1$, $\omega_3 = 2000$ возникают автоколебания вокруг неустойчивого фокуса. Результаты численного интегрирования системы (14) для различных модификаций метода Эйлера (Эйлер1 – первого порядка, Эйлер2 – второго порядка, Эйлер3 – третьего порядка, Точно – максимально возможная точность) и нашего метода (Оптимальный) при начальных значениях $x_{10} = 0.7$, $x_{20} = 0.2$ приведены в табл. 7. Максимальная точность определена по порядку ненулевых высших производных

$$\begin{aligned} x_1'' &= -\omega_1 - \omega_{-1} - \omega_2, \\ x_2'' &= -\omega_{-2} - \omega_3(1 - x_1 - x_2)^2 + 2\omega_3x_2(1 - x_1 - x_2), \\ x_1''' &= 0, \\ x_2''' &= 4\omega_3(1 - x_1 - x_2) - 2\omega_3x_2 \\ x_2'''' &= -6\omega_3, \\ x_2''''' &= 0. \end{aligned}$$

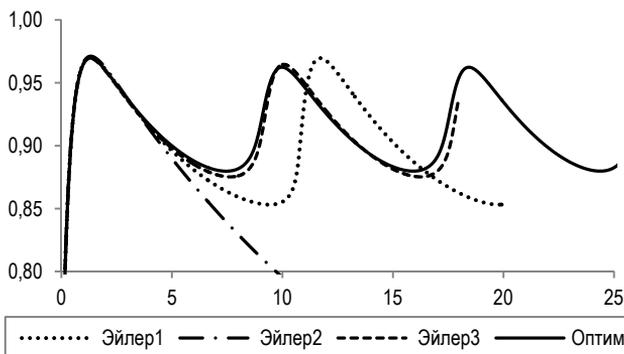
Как видно, наилучшие результаты показывает оптимизированный метод, среднеквадратическая ошибка (корень из суммы квадратов, деленный на число точек) минимальна $E_{\text{оптим}} = 0,0002$ даже при не полностью оптимальном значении $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$, которое соответствует эвристике «среднего», описываемой формулой (11). Графическая иллюстрация приведена на рис. 2.

Таким образом, простой численный метод решения задачи Коши позволяет вычислять решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с высокой точностью и минимальным эффектом «сползания». Этот метод может быть применен для уточнения решений обыкновенных дифференциальных уравнений без использования производных высших порядков.

Таблица 7

Точность модификаций метода Эйлера для системы (14) при $h = 0.01$

t	Эйлер1	Эйлер1	Ошибка	Эйлер2	Эйлер2	Ошибка	Эйлер3	Эйлер3	Ошибка	Точно	Точно	Ошибка	Оптимальный	Оптимальный	Ошибка
0,00	0,70	0,20		0,70	0,20		0,70	0,20		0,70	0,20		0,70	0,20	
0,01	0,70	0,16	0,0030	0,70	0,16	0,0000	0,70	0,16	0,0000	0,70	0,16	0,00	0,70	0,17	0,00525307
0,02	0,71	0,10	0,0070	0,71	0,11	0,0001	0,71	0,11	0,0000	0,71	0,11	0,00	0,70	0,11	0,00491431
0,03	0,71	0,03	0,0079	0,71	0,03	0,0002	0,71	0,03	0,0000	0,71	0,03	0,00	0,71	0,03	0,00700015
0,04	0,72	-0,01	0,0052	0,72	-0,01	0,0003	0,72	-0,01	0,0000	0,72	-0,01	0,00	0,71	-0,02	0,00472926
0,05	0,73	0,01	0,0048	0,73	0,00	0,0001	0,73	0,00	0,0000	0,73	0,00	0,00	0,72	0,00	0,00467941
0,10	0,76	0,00	0,0050	0,76	-0,01	0,0003	0,76	0,00	0,0000	0,76	0,00	0,00	0,76	0,00	0,00359888
0,20	0,82	0,00	0,0050	0,82	0,00	0,0004	0,82	0,00	0,0000	0,82	0,00	0,00	0,82	0,00	0,00266897
0,30	0,86	0,00	0,0049	0,86	0,00	0,0005	0,86	0,00	0,0000	0,86	0,00	0,00	0,86	0,00	0,00197777
0,40	0,89	0,00	0,0049	0,89	0,00	0,0006	0,89	0,00	0,0000	0,89	0,00	0,00	0,89	0,00	0,00146269
0,50	0,92	0,00	0,0049	0,92	0,00	0,0008	0,92	0,00	0,0000	0,92	0,00	0,00	0,92	0,00	0,00107800
1,00	0,97	0,01	0,0047	0,97	0,00	0,0019	0,97	0,00	0,0002	0,97	0,00	0,00	0,97	0,00	0,00021155
...															
25,00	0,91	0,09	0,0302	0,67	0,32	0,3075	0,88	0,11	0,0132	0,88	0,10	0,00	0,88	0,10	0,00012234
25,10	0,91	0,09	0,0257	0,67	0,32	0,3104	0,88	0,11	0,0150	0,88	0,10	0,00	0,88	0,10	0,00015355
25,20	0,91	0,09	0,0212	0,67	0,32	0,3140	0,88	0,11	0,0173	0,89	0,09	0,00	0,89	0,09	0,00019311
25,30	0,90	0,09	0,0172	0,67	0,32	0,3184	0,88	0,11	0,0200	0,89	0,09	0,00	0,89	0,09	0,00024412
25,40	0,90	0,09	0,0151	0,67	0,33	0,3238	0,88	0,11	0,0235	0,89	0,09	0,00	0,89	0,09	0,00031081
25,49	0,90	0,09	0,0171	0,67	0,33	0,3298	0,88	0,10	0,0274	0,89	0,08	0,00	0,89	0,08	0,00038827
Ошибка			0,0563			0,1907			0,0063			0,0000			0,0002

Рис.2. Зависимость $x_1(t)$ для системы (14)

при $\omega_1 = 2.89$, $\omega_{-1} = 0.01$, $\omega_2 = 3/89$, $\omega_{-2} = 0.1$, $\omega_3 = 2000$, $x_{10} = 0.7$ и $x_{20} = 0.2$

Представленный в работе новый метод позволяет уменьшить погрешность численного исследования моделей динамических процессов в сложных технических системах.

Литература

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: в 2 т. М.: Физматлит, 1962. Т. 1. С. 307.
2. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MatLab. СПб.: Питер, 2001.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. Т. 1. 690 с.

5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980, 307 с.

6. Fedotov V.Kh., Alekseev B.V., Koltsov N.I. Self-oscillations in three step catalytic reactions. *React. Kinet. Catal. Lett.*, 1983, vol. 23, no. 3-4, pp. 301–306.

ФЕДОТОВ ВЛАДИСЛАВ ХАРИТОНОВИЧ – кандидат химических наук, доцент кафедры информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (fvh@inbox.ru).

НОВОЖИЛОВА НИНА ВАСИЛЬЕВНА – кандидат экономических наук, доцент кафедры информационных систем, Чувашский государственный университет, Россия, Чебоксары (mallin@mail.ru).

V. FEDOTOV, N. NOVOZHILOVA
HIGH-ACCURACY METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION
OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Key words: *mathematical modeling, numerical integration of differential equations, highly accurate numerical method for solving the Cauchy problem, dynamic processes in the fields of science and engineering, numerical methods, computer calculations of a complex technical system.*

The accuracy of the numerical integration of differential equations depends on a little-studied laws of algebra of approximate computation – errors of the methods, sampling, stability of difference schemes, etc. As a consequence, at each iteration a problem, different from the previous is solved, which leads to accumulation of calculation errors (the effect of «slipping»). In the work a simple high-precision numerical method for solving the Cauchy problem without using higher derivatives and with minimum effect of "slipping" is described and tested.

References

1. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii: v 2 t.* [Methods of calculations. 2 vols]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962, vol. 1, p. 307.

2. D'yakonov V., Kruglov V. *Matematicheskie pakety rasshireniya MatLab* [Mathematical expansion packs MATLAB]. St. Petersburg, Piter Publ., 2001.

3. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for scientists and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1974.

4. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya: v 3 t.* [A course of differential and integral calculus. 3 vols]. Moscow, Leningrad, Gostekhtheoretizdat Publ., 1949, vol. 1, 690 p.

5. Forsait Dzh., Mal'kol'm M., Mouler K. *Mashinnye metody matematicheskikh vychislenii* [Machine methods of mathematical calculations]. Moscow, Mir Publ., 1980.

6. Fedotov V.Kh., Alekseev B.V., Koltsov N.I. Self-oscillations in three step catalytic reactions. *React. Kinet. Catal. Lett.*, 1983, vol. 23, no. 3-4, pp. 301–306.

FEDOTOV VLADISLAV – Candidate of Chemical Sciences, Associate Professor of Information Systems Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (fvh@inbox.ru).

NOVOZHILOVA NINA – Candidate of Economics Sciences, Associate Professor of Information Systems Department, Chuvash State University, Russia, Cheboksary (mallin@mail.ru).

Ссылка на статью: Федотов В.Х., Новожилова Н.В. Высокоточный метод численного решения дифференциальных уравнений // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 174–184.

УДК 62.514.52

ББК 32.965-01

А.М. ШЕЛЕМЕТЬЕВ, Я.В. ШЕЛЕМЕТЬЕВА, А.В. СМИРНОВ

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕСНЫМ ТРАНСПОРТНЫМ СРЕДСТВОМ, ОСНОВАННОЙ НА РАЗНОСТИ СКОРОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ КОЛЕС

Ключевые слова: система рулевого управления, управляющее колесо, управляющий механизм.

Предложен способ управления колесным транспортным средством за счет задания определенных скоростей вращения управляющих колес без использования рулевого механизма. Разработан алгоритм определения скоростей вращения управляющих колес, учитывающий габаритные размеры транспортного средства и влияние хода подвески. Предложены структурная и функциональная схемы системы управления колесным транспортным средством.

В настоящее время одним из актуальных направлений исследований является повышение эффективности работы транспортных средств (далее – ТС). При этом одним из наиболее перспективных направлений развития ТС является развитие колесных ТС на электротяге вследствие их экологичности и высокого уровня КПД [7].

При управлении колесным ТС, как правило, возникает необходимость в принудительном изменении траектории его движения, для чего в конструкции ТС предполагается наличие соответствующей системы рулевого управления. В подавляющем большинстве случаев такая система изменяет угол поворота управляющих колес с помощью рулевого механизма за счет приложенного к нему внешнего усилия. В свою очередь, такой принцип управления приводит к необходимости использования кинематической связи рулевого механизма и рулевого привода, что усложняет конструкцию ТС [8].

На рис. 1 представлена типовая схема рулевого управления на примере четырехколесного ТС, состоящего из рулевого механизма и рулевого привода. Рулевым механизмом называют механизм, который позволяет осуществить поворот управляющих колес с необходимым передаточным числом, а рулевым приводом называют систему тяг и рычагов, которые в совокупности с рулевым механизмом осуществляют поворот управляющих колес [4. С. 99–102].

Рассмотрим способ рулевого управления колесным ТС, при котором изменение угла поворота управляющих колес, связанных между собой рулевым приводом, осуществляется не за счет внешнего усилия, передающегося посредством рулевого механизма, а за счет разности скоростей вращения управляющих колес.

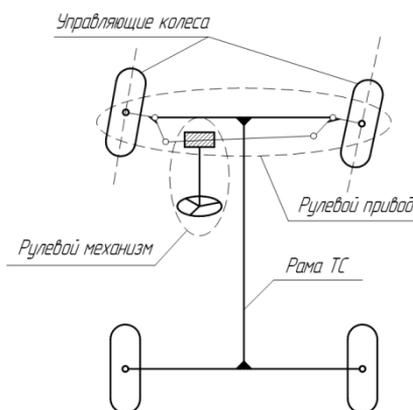


Рис. 1. Схема рулевого управления четырехколесным ТС

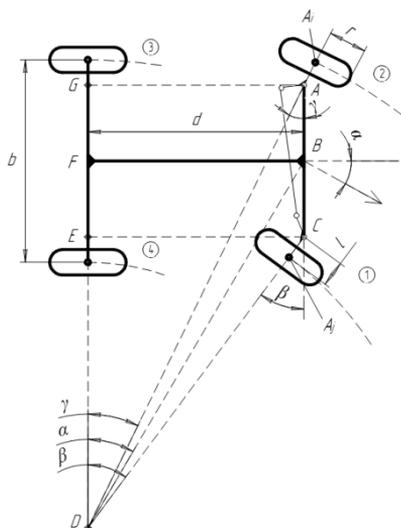


Рис. 2. Схема поворота четырехколесного ТС

На рис. 2 показана схема, поясняющая принцип выбора углов поворота управляющих колес, при котором исключается юз колес при повороте ТС. Суть принципа заключается в выборе таких параметров рулевого привода, при которых обеспечивается соединение мнимых перпендикуляров всех колес ТС в одной точке [8].

Приведем расчет зависимостей скоростей вращения всех колес ТС с известными габаритными размерами от требуемых скорости его движения V_0 и угла поворота α .

В различных источниках, например в [2, 5, 8], подобные расчеты приведены, однако в них пренебрегается величинами длин рулевых рычагов (l). В предлагаемом способе поворота величины длин рулевых рычагов являются параметрами, пренебрегать которыми нельзя, так как от их величины зависят возникающие при рассогласовании скоростей вращения колес моменты сил, приводящие к повороту колес.

Определим следующие параметры ТС (см. рис 2): r – радиус колес, м; d – межосевое расстояние, м; b – колесная база, м; l – длина поворотных рычагов рулевого привода, м.

Во время поворота ТС каждое из колес проходит за единицу времени разный путь, следовательно, радиусы движения колес и ТС в целом (расстояние DB) будут также отличаться.

Выразим радиус движения ТС и радиусы движения каждого из колес через межосевое расстояние и угол поворота ТС:

$$R = BD = \frac{BF}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin \alpha}.$$

Аналогично определим радиусы движения каждого из колес ТС, а также углы поворота β и γ управляющих колес 1 и 2, соответственно.

Радиус движения заднего внутреннего колеса 4:

$$R_4 = FD - \frac{b}{2} = \frac{BF}{\sin \alpha} - \frac{b}{2} = \frac{d}{\sin \alpha} - \frac{b}{2}.$$

Если принудительно задавать такую разность скоростей вращения управляющих колес, которая соответствует определенному углу поворота ТС, то в силу связи управляющих колес через рулевой привод из-за возникающего разностного момента сил в точках их поворота (точки A и C , рис. 2) будет наблюдаться стремление управляющих колес изменить свои углы поворота в соответствии с заданной траекторией движения.

Другими словами, изменение углов поворота управляющих колес будет происходить за счет моментов сил, равных произведению плеча (рычага) длиной l , и сил, возникающих вследствие реакции опоры, с которой взаимодействуют управляющие колеса, за счет разности скоростей их вращения [5. С. 16–45].

Радиус движения заднего наружного колеса 3:

$$R_3 = R_4 + b = \frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{b}{2}.$$

Тангенс угла поворота переднего колеса 1, движущегося по внутренней траектории:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{CE}{ED} = \frac{d}{R_4 + l} = \frac{d}{\frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{b}{2} + l},$$

тогда $\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{d}{\frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{b}{2} + l} \right)$.

Следовательно, радиус движения данного колеса будет равен:

$$R_1 = \frac{CE}{\sin\beta} - l = \frac{d}{\sin\beta} - l = \frac{d}{\sin \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{d}{\frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{b}{2} + l} \right) \right]} - l.$$

Аналогично определим угол поворота переднего колеса, движущегося по наружной траектории, а также радиус его движения:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{AG}{GD} = \frac{d}{R_3 - l} = \frac{d}{\frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{b}{2} - l}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{d}{\frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{b}{2} - l} \right),$$

$$R_2 = \frac{AG}{\sin\gamma} + l = \frac{d}{\sin\gamma} + l = \frac{d}{\sin \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{d}{\frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{b}{2} - l} \right) \right]} + l.$$

С учетом того, что ТС движется по окружности радиусом $R = BD$ со скоростью V_0 , а также зная радиусы всех окружностей, по которым движутся колеса ТС (R_1, R_2, R_3, R_4), рассчитаем скорости перемещения осей колес ТС.

Пусть за время движения T колеса 1, 2, 3 и 4 описывают окружности длинами l_1, l_2, l_3, l_4 , соответственно, а точка B – описывает окружность длиной l . Тогда:

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R_1}{V_1} = \frac{2\pi R_2}{V_2} = \frac{2\pi R_3}{V_3} = \frac{2\pi R_4}{V_4},$$

следовательно:

$$V_1 = V \frac{R_1}{R}, \quad V_2 = V \frac{R_2}{R}, \quad V_3 = V \frac{R_3}{R}, \quad V_4 = V \frac{R_4}{R}.$$

Зная скорости перемещения осей колес ТС и радиусы данного перемещения, рассчитаем их скорости вращения (циклические частоты вращения колес):

$$\omega_1 = \frac{V R_1}{2 \pi r R}, \quad \omega_2 = \frac{V R_2}{2 \pi r R}, \quad \omega_3 = \frac{V R_3}{2 \pi r R}, \quad \omega_4 = \frac{V R_4}{2 \pi r R}.$$

Проведем математическое моделирование процесса поворота четырехколесного ТС, рулевое управление которого осуществляется в соответствии с предложенным способом. В качестве примера определим следующие параметры ТС: $b = 1,5$ м, $d = 2,5$ м, $l = 0,15$ м, $r = 0,15$ м, $V_0 = 60$ км/ч. На рис 3. представлен график зависимостей скоростей вращения всех колес ТС от угла поворота ТС для выбранных условий.

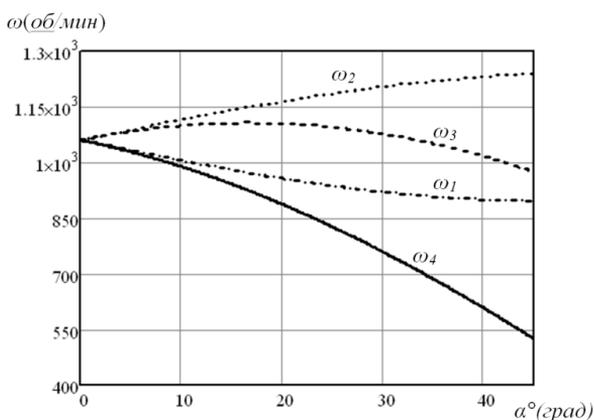


Рис. 3. График зависимостей скоростей вращения колес от угла поворота ТС

Анализ результатов позволяет провести оценку разности скоростей вращения колес ТС от его габаритов и траектории движения. Например, для выбранных параметров ТС его движение с углом поворота в 5° обеспечивается разностью скоростей вращения управляющих колес равной 50 об./мин, что соответствует 4,8% от скорости вращения колес при прямолинейном движении (для $\alpha = 10^\circ - 100$ об./мин и 9,6%, соответственно).

Расширим постановку задачи. Пусть ТС имеет независимую подвеску колес и движется по поверхности с неровностями. Представим, что ТС должно двигаться прямолинейно. Тогда, если на пути одного из управляющих колес встретится неровность, скорость вращения этого колеса необходимо увеличить для компенсации увеличения пути и сохранения прежнего направления движения ТС.

С целью расчета требуемой скорости перемещения колеса при движении по неровности отложим от оси вращения колеса векторы моментальных скоростей по вертикали H и по горизонтали V . Тогда модуль вектора моментальной скорости колеса V' вычисляется по теореме Пифагора $V' = \sqrt{V^2 + H^2}$.

Допустим, что рама ТС при движении не меняет свой угол наклона по всем трем осям и движется прямолинейно с постоянной скоростью. Тогда моментальная скорость колеса по горизонтали это скорость ТС, а моментальную скорость подъема колеса по вертикали H вычислим из треугольника, образуемого рычагом колеса l , высотой подъема колеса h и проекцией рычага l на плоскость расположения рамы.

Высоту подъема колеса h можно выразить через длину рычага l и синус угла θ между рычагом и плоскостью рамы:

$$h = l \cdot \sin \theta.$$

Тогда моментальное изменение высоты h будет производной этой функции: $h' = l \cdot \cos \theta$. Эта функция фактически показывает, насколько изменится катет h при изменении угла на l радиан при угле θ . Умножив эту функцию на производную угла $\frac{d\theta}{dt}$ (моментальная скорость изменения угла), получим

моментальную скорость изменения высоты h по времени: $H = \frac{d\theta}{dt} \cdot l \cdot \cos \theta$.

Таким образом, скорость первого колеса при движении по неровности будет иметь вид:

$$V_1' = \sqrt{\left(V \cdot \frac{R_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{d\theta_1}{dt} \cdot l \cdot \cos \theta_1\right)^2}.$$

Аналогично можно рассчитать скорости остальных колес V_2' , V_3' и V_4' . Следовательно, скорости вращения колес:

$$\omega_1 = \frac{V_1'}{2\pi r}, \quad \omega_2 = \frac{V_2'}{2\pi r}, \quad \omega_3 = \frac{V_3'}{2\pi r}, \quad \omega_4 = \frac{V_4'}{2\pi r}.$$

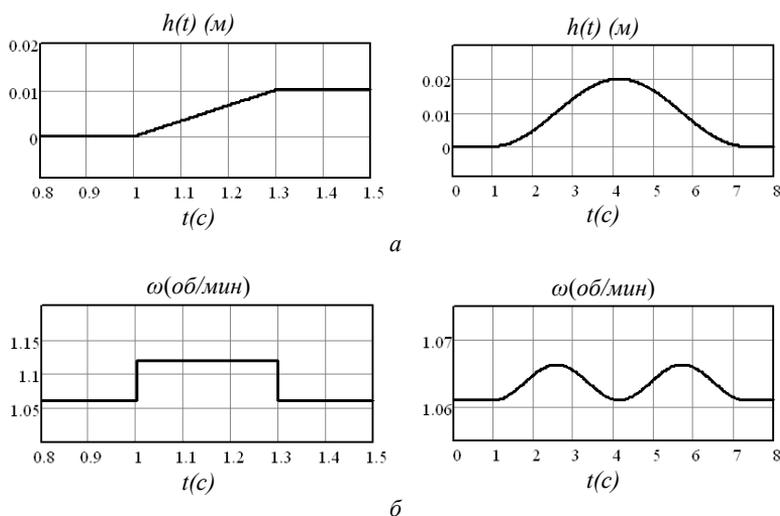


Рис. 4. Траектории движения колеса по неровности (а) и зависимости скоростей вращения управляющих колес ТС от времени (б)

Проведем математическое моделирование процесса наезда одного переднего колеса ТС на два вида препятствий: линейную горку и плавную кочку. В качестве примера определим следующие параметры ТС (масштабная модель): $l = 0,02$ м, $r = 0,015$ м, $V_0 = 0.1$ в/с. На рис 4 представлены траектории движения управляющего колеса по неровности (рис. 4, а) и зависимости скоростей вращения управляющего колеса ТС, передвигающегося по соответствующей неровности, от времени (рис. 4, б) для выбранных условий.

Видим, что скорость вращения управляющего колеса, передвигающегося по неровности, находится в дифференциальной зависимости от траектории его движения.

Рулевое управление колесным ТС, основанное на рассогласовании скоростей вращения управляющих колес, может осуществляться с помощью обобщенного алгоритма управления ТС, блок-схема которого представлена на рис. 5.

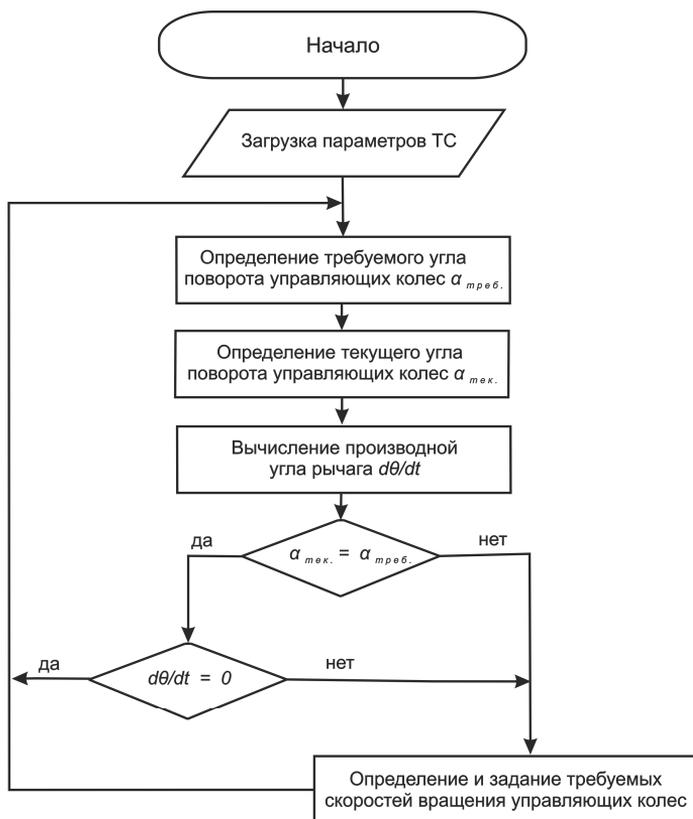


Рис. 5. Блок-схема алгоритма рулевого управления колесного ТС на основе рассогласования скоростей вращения управляющих колес

После загрузки параметров происходит определение требуемого угла поворота ТС $\alpha_{\text{треб.}}$. Далее определяется текущий угол поворота ТС $\alpha_{\text{тек.}}$. Затем происходит сравнение $\alpha_{\text{тек.}}$ и $\alpha_{\text{треб.}}$. В случае их отличия друг от друга происходит вычисление скоростей вращения колес ТС и их передача на драйвер силовых установок.

Применение способа рулевого управления колесного ТС на основе рассогласования скоростей вращения управляющих колес позволит снизить требования к рулевому механизму либо полностью от него отказаться. При этом обязательным требованием является наличие, как минимум, двух силовых установок, приводящих в движение управляющие колеса, с возможностью независимого управления их мощностью. Данное требование обуславливает целесообразность применения такого способа рулевого управления, например в электромобилях, где в качестве силовых установок выступают все более популярные «мотор-колеса» [2. С. 5].

Практическая реализация предлагаемого способа рулевого управления подразумевает разработку системы управления, позволяющей в соответствии с алгоритмом, представленным на рис. 6, управлять несколькими вентильными электродвигателями («мотор-колесами»), объединенными в одном транспортном средстве.

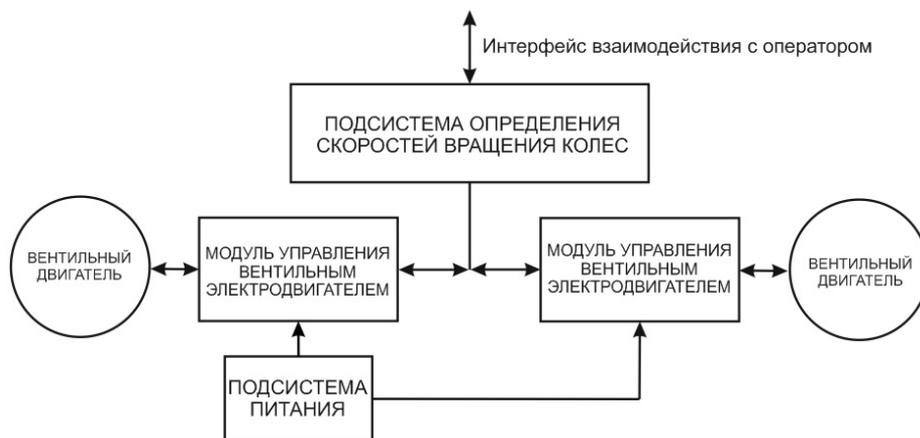


Рис. 6. Структурная схема системы управления двумя вентильными двигателями

Модули управления вентильными электродвигателями связаны с подсистемой определения скоростей вращения колес, в которой рассчитываются требуемые скорости вращения колес исходя из заданных скорости и угла поворота транспортного средства, определяемых оператором.

Модуль управления вентильным электродвигателем состоит из контроллера, блока силовых ключей и интерфейса взаимодействия с подсистемой определения скоростей вращения колес. Структурная схема модуля управления вентильным электродвигателем представлена на рис. 7.

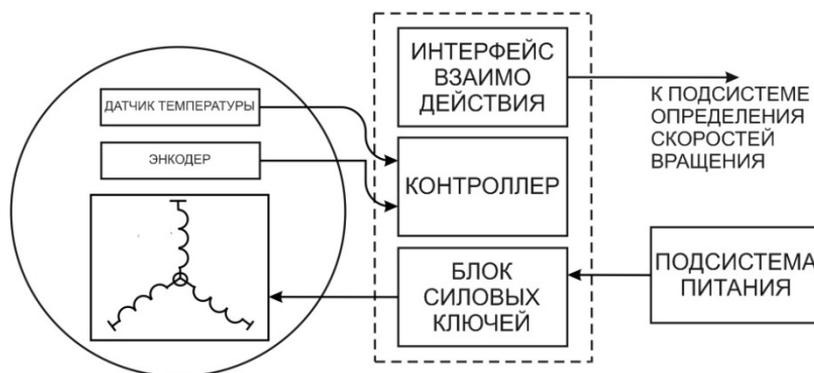


Рис. 7. Структурная схема модуля управления

Таким образом, применение системы управления колесным транспортным средством, основанной на разности скоростей вращения управляющих колес, позволит снизить требования к рулевому механизму либо полностью от него отказаться.

Литература

1. Гаптрвалиев И.И., Смирнов А.В. Система управления колесными транспортными средствами на основе регулирования циклических частот вращения управляющих колес // Информационные технологии в профессиональной деятельности и научной работе: сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф.: в 2 ч. Йошкар-Ола: МарГТУ, 2011. Ч. 1. С. 215–219.
2. Лысов М.И. Рулевые управления автомобилей. М.: Машиностроение, 1972. 344 с.
3. Пат. 2562937 РФ, (51)МПК В62D 6/08 (2006.01), В62D 9/00 (2006.01), В62D 15/00 (2006.01). Способ поворота колесного транспортного средства / Смирнов А.В., Шелеметьев А.М., Гаптрвалиев И.И.; патентообладатель Поволжский гос. технол. ун-т. № 2014118165/11; заявл. 05.05.2014; опубл. 10.09.2015, Бюл. № 25.
4. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Машиностроение, 1990. 352 с.
5. Туревский И.С. Теория автомобиля. М.: Высш. шк., 2005. 240 с.
6. Шелеметьев А.М., Смирнов А.В. Принцип и алгоритм рулевого управления колесным транспортным средством, основанного на рассогласовании скоростей вращения управляющих колес // Автомобильная промышленность. 2013. № 11. С. 15–18.
7. Anderson M., Harty D. Unsprung Mass with In-Wheel Motors – Myths and Realities. 10th Int. Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC'10), Aug. 2010, pp. 261–266.
8. Helms H., Pehnt M., Lambrecht U., Liebich A. Electric vehicle and plug-in hybrid energy efficiency and life cycle emissions. 18th Int. Symposium Transport and Air Pollution, 2010, pp. 113–124.

ШЕЛЕМЕТЬЕВ АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ – аспирант кафедры информационно-вычислительных систем, Поволжский государственный технологический университет, Россия, Йошкар-Ола (andrey.shelemetve@gmail.com).

ШЕЛЕМЕТЬЕВА ЯНА ВЛАДИМИРОВНА – аспирантка кафедры информационно-вычислительных систем, Поволжский государственный технологический университет, Россия, Йошкар-Ола (yanabaikova@yandex.ru).

СМИРНОВ АЛЕКСЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ – кандидат технических наук, доцент кафедры информационно-вычислительных систем, Поволжский государственный технологический университет, Россия, Йошкар-Ола (abc_r12@mail.ru).

A. SHELEMET'YEV, Ya. SHELEMET'YEVA, A. SMIRNOV

**RESEARCH OF INFLUENCE OF SUSPENSION TRAVEL
ON THE PRINCIPLE AND CONTROL OF WHEELED VEHICLES,
BASED ON THE SPEED DIFFERENCE BETWEEN STEERING WHEELS**

Key words: steering management, steering wheel, steering mechanism.

The method of vehicle's management by setting certain speeds of steering wheel without using the steering mechanism is described. The influence of suspension travel on the moment of the wheel speed changing is explored. The formula which describes the algorithm of the wheel speed changing is proposed. The algorithm of the vehicle's steering management based on the mentioned method is proposed. Structural and functional scheme of the vehicle's management system are proposed.

References

1. Gaptrvaliev I.I., Smirnov A.V. Sistema upravleniya kolesnymi transportnymi sredstvami na osnove regulirovaniya tsiklicheskikh chastot vrashcheniya upravlyayushchikh koles [Vehicle management system based on control whells cyclic frequency regulation]. *Informatsionnye tekhnologii v professional'noi deyatel'nosti i nauchnoi rabote: sb. materialov Vseros. nauch.-prakt. konf.: v 2 ch.* [Proc. of Rus. Conf. «Information technologies in professional and scientific work». 2 parts]. Yoshkar-Ola, Mari State Technical University Publ., 2011, patr 1, pp. 215–219.
2. Lysov M.I. *Rulevye upravleniya avtomobilei* [Vehicle's steering management]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972, 344 p.

3. Smirnov A.V., Shelemet'ev A.M., Gaptrvaliev I.I. *Sposob povorota kolesnogo transportnogo sredstva* [Vehicle's turning method]. Patent RF, no. 2562937, 2014.
4. Smirnov G.A. *Teoriya dvizheniya kolesnykh mashin. 2-e izd., dop. i pererab* [The movement theory of wheeled vehicles. 2nd ed.]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990, 352 p.
5. Turevskii I.S. *Teoriya avtomobilya* [Vehicle's theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005, 240 p.
6. Shelemet'ev A.M., Smirnov A.V. *Printsip i algoritm rulevogo upravleniya kolesnym transportnym sredstvom, osnovannogo na rassoglasovanii skorostei vrashcheniya upravlyayushchikh koles* [The Method and Algorithm of the Wheeled Vehicle's Steering Management Based on the Difference Between Steering Wheel's Rotation Speed]. *Avtomobil'naya promyshlennost'* [Automotive Industry], 2013, no. 13, pp. 15–18.
7. Anderson M., Harty D. Unsprung Mass with In-Wheel Motors – Myths and Realities. 10th Int. Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC'10), Aug. 2010, pp. 261–266.
8. Helms H., Pehnt M., Lambrecht U., Liebich A. Electric vehicle and plug-in hybrid energy efficiency and life cycle emissions. 18th Int. Symposium Transport and Air Pollution, 2010, pp. 113–124.

SHELEMETYEVA ANDREY – Post-graduate Student of Information and Computing Systems Department, Volga State University of Technology, Russia, Yoshkar-Ola (andrey.shelemetve@gmail.com).

SHELEMETYEVA YANA – Post-graduate Student of Information and Computing Systems Department, Volga State University of Technology, Russia, Yoshkar-Ola (yanabaikova@yandex.ru).

SMIRNOV ALEKSEY – Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor of Information and Computing Systems Department, Volga State University of Technology, Russia, Yoshkar-Ola (abc_r12@mail.ru).

Ссылка на статью: Шелеметьев А.М., Шелеметьева Я.В., Смирнов А.В. Разработка системы управления колесным транспортным средством, основанной на разности скоростей вращения управляющих колес // Вестник Чувашского университета. – 2016. – № 1. – С. 185–193.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Редакция журнала «Вестник Чувашского университета» просит авторов руководствоваться нижеприведенными правилами.

1. Авторские оригиналы представляются на бумажном и электронном носителе. Авторский текстовый оригинал должен быть пронумерован и подписан авторами на титульном листе с указанием даты.

2. К статьям, направляемым в редакцию, прилагаются:

- 1) *заявление автора на имя главного редактора;*
- 2) *две внешние рецензии;*
- 3) *ходатайство научного руководителя;*
- 4) *лицензионный договор в двух экземплярах;*
- 5) *экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.*

3. Авторы должны указать рубрику, в которой следует поместить статью.

4. Оформление статьи:

- 1) *классификационные индексы Универсальной десятичной классификации (УДК), Библиотечно-библиографического классификатора (ББК);*
- 2) *инициалы и фамилия авторов;*
- 3) *название статьи;*
- 4) *ключевые слова;*
- 5) *аннотация статьи;*
- 6) *название статьи, инициалы и фамилия автора на английском языке;*
- 7) *ключевые слова на английском языке;*
- 8) *аннотация на английском языке;*
- 9) *текст статьи;*
- 10) *пристатейный библиографический список;*
- 11) *транслитерированный библиографический список References;*
- 11) *сведения об авторе.*

Авторские оригиналы подготавливаются с помощью компьютера в среде Microsoft Word (файлы типа doc). Формат бумаги А4, поля: справа и слева 4 см, сверху 4,5 см, снизу 5,7 см, от края до верхнего колонтитула 3 см, красная строка 0,75 см. Текст статьи набирается шрифтом Times New Roman размера 11 пт через 1 интервал.

Текст статьи представляется в двух экземплярах с приложением файла в электронном виде.

5. Рисунки. Количество рисунков не более 4. На рисунки должны быть ссылки. Рисунки должны быть внедрены в режиме Вставка Объект Рисунок Microsoft Word. Подписи выполняются шрифтом размера 9 пт.

6. Формулы и буквенные обозначения по тексту. Формулы набираются в редакторе формул Microsoft Equation. Шрифт для греческих букв – Symbol, для всех остальных – Times New Roman, основной размер 11 пт, крупный индекс 7 пт, мелкий 5 пт.

Латинские буквы набираются курсивом, буквы греческого алфавита и кириллицы – прямым шрифтом, обозначения матриц, векторов, операторов – прямым полужирным шрифтом.

Формулы располагаются по центру страницы. Номер формулы ставится у правого края. Нумеруются лишь те формулы, на которые имеются ссылки.

При выборе единиц физических величин рекомендуется придерживаться международной системы единиц СИ.

7. Таблицы. Текст в таблицах набирается шрифтом размером 9 пт, заголовок выделяется полужирным шрифтом. На таблицы должны быть ссылки.

8. Список литературы. Список строится по алфавиту, записи рекомендуется располагать сначала на языке издания, в которое включен список, затем на других языках. Источники набираются шрифтом Times New Roman размера 9 пт. При оформлении списка литературы необходимо руководствоваться ГОСТом Р 7.0.5-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила оформления».

Ссылки на источники в тексте даются в квадратных скобках, например [1], [1. С. 5].

9. Список References. Транслитерацию русского текста в латиницу следует производить в соответствии со стандартом BSI.

10. Сведения об авторах набираются полужирным шрифтом размера 10 пт *на русском и английском языках в именительном падеже* по следующей форме: *Фамилия, имя, отчество – ученая степень, должность, место работы, страна, город. Контактная информация (e-mail).*

11. Статьи, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что статья принята к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией. Доработанный текст автор должен вернуть вместе с первоначальным экземпляром статьи, а также ответами на все замечания. Датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

12. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

13. В одном номере журнала может быть опубликовано, как правило, не более двух статей одного автора, в том числе в соавторстве.

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА**Абрамов С.В.**Частотные характеристики понижающего импульсного преобразователя
в режимах непрерывного и прерывистого тока..... 5**Афанасьев А.А.**

Гистерезисные явления в электротехнической стали 15

Аюурзана Э., Петров М.И., Кузьмин А.А.Экспериментальное исследование эффективности работы дугогасящих реакторов
в Улан-Баторских городских электрических сетях 6-10 кВ 30**Бычкова И.Ю., Бычков А.В., Славутский Л.А.**Импульсный ультразвуковой контроль стратификации воздуха
над нагретой поверхностью 39**Егоров Е.Г., Иванова С.П., Луия Н.Ю.**

Энергосберегающий метод коммутационных испытаний магнитных пускателей 47

Куликов А.Л., Ананьев В.В.Оценка скорости распространения электромагнитных волн
в задаче определения места повреждения линии электропередачи..... 56**Охоткин Г.П.**Синтез логического устройства релейной САР тока при диагональной коммутации
с поочередным переключением ключей мостовой схемы вентильного преобразователя 65**Охоткин Г.П.**Моделирование в Multisim системы автоматического регулирования тока
при диагональной коммутации с поочередным переключением ключей мостовой схемы
вентильного преобразователя 71**Резюков И.В., Резюкова Л.В.**Современное состояние электрофизических методов размерной обработки отверстий
малого диаметра в деталях из хрупких неметаллических материалов..... 76**Рогинская Л.Э., Горбунов А.С.**Основные параметры индукторов комплексных электротехнологических установок
для индукционного нагрева с добавочными проводящими средами с прорезями 86**Стеклов А.С., Серебряков А.В., Титов В.Г.**Определение степени работоспособности судовых синхронных генераторов
с применением искусственных нейро-нечетких сетей 97**Тошходжаева М.И.**Анализ повреждений воздушных линий электропередач 35-220 кВ на примере
Согдийской электрической сети 105

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

Бурькова Е.В. Задача оценки защищенности информационных систем персональных данных.....	112
Галанина Н.А., Песошин В.А., Иванова Н.Н., Калмыков Б.М., Дмитриев Д.Д. Аппаратурная реализация алгоритма быстрого преобразования Фурье с заданными свойствами в системе счисления в остаточных классах	119
Иваницкий А.Ю., Урусов А.М. Численный анализ метода поточечной невязки	127
Микишанина Е.А. Компьютерное моделирование решений плоской краевой задачи теории фильтрации...	145
Новожилова Н.В., Федотов В.Х. Численное решение дифференциальных уравнений с особыми точками.....	153
Слаутская Е.В., Аbruков В.С., Слаутский Л.А. Нейросетевой системный анализ уровневых психологических характеристик	164
Федотов В.Х., Новожилова Н.В. Высокоточный метод численного решения дифференциальных уравнений.....	174
Шелемetyев А.М., Шелемetyева Я.В., Смирнов А.В. Разработка системы управления колесным транспортным средством, основанной на разности скоростей вращения управляющих колес	185
ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ	194

CONTENTS

ELECTRICAL TECHNOLOGY AND POWER ENGINEERING

<i>Abramov S.</i> FREQUENCY CHARACTERISTICS THE BUCK PULSE CONVERTER IN CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS CURRENT MODE	5
<i>Afanasyev A.</i> HYSTERESIS PHENOMENA IN ELECTRICAL STEEL	15
<i>Ayurzana E., Petrov M., Kuzmin A.</i> EXPERIMENTAL STUDY OF PERFORMANCE ARC SUPPRESSION COILS AT THE ULAANBAATAR CITY ELECTRIC NETWORKS OF 6–10 kV	30
<i>Bychkova I., Bychkov A., Slavutskii L.</i> PULSE ULTRASONIC CONTROL OF THE AIR STRATIFICATION OVER THE HEATED SURFACE	39
<i>Egorov E., Ivanova S., Luiya N.</i> METHOD OF SWITCHING POWER TEST MAGNETIC STARTER	47
<i>Kulikov A., Ananiev V.</i> TRAVELLING WAVE PROPAGATION SPEED ESTIMATE IN POWER LINE FAULT LOCATION ISSUE	56
<i>Okhotkin G.</i> THE SYNTHESIS OF LOGICAL DEVICES OF RELAY SYSTEMS OF AUTOMATIC CURRENT REGULATION WHEN DIAGONAL SWITCHING WITH ALTERNATE SWITCHING KEYS THE BRIDGE CIRCUIT RECTIFIER CONVERTER	65
<i>Okhotkin G.</i> THE SIMULATION ON MULTISIM SYSTEM OF AUTOMATIC REGULATION OF THE CURRENT IN THE DIAGONAL WITH ALTERNATE SWITCHING OF THE SWITCHING KEYS OF THE BRIDGE CIRCUIT RECTIFIER CONVERTER	71
<i>Rezyukov I., Rezyukova L.</i> THE MODERN STATE OF ELECTROPHYSICAL METHODS DIMENSIONAL TREATMENT OF SMALL HOLES IN DETAILS OF THE BRITTLE NON-METALLIC MATERIALS	76
<i>Roginskaya L., Gorbunov A.</i> THE MAIN PARAMETERS OF INDUCTORS OF COMPLEX ELECTROTECHNOLOGICAL SYSTEMS FOR INDUCTION HEATING WITH ADDITIONAL CONDUCTING MEDIUMS WITH SLOTS	86
<i>Steklov A., Serebryakov A., Titov V.</i> DETERMINATION OF DEGREE OF USE OF SHIP SYNCHRONOUS GENERATORS WITH THE USE OF ARTIFICIAL NEURO-FUZZY NETS	97
<i>Toshhodzhaeva M.</i> DAMAGE ANALYSIS OF OVERHEAD POWER LINES OF 35-220 kV EXAMPLE SOGD MAINS	105

INFORMATICS, COMPUTER ENGINEERING AND CONTROL

<i>Burkova E.</i> THE TASK OF ASSESSING THE SECURITY OF INFORMATION SYSTEMS OF PERSONAL DATA	112
<i>Galanina N., Pesoshin V., Ivanova N., Kalmykov B., Dmitriev D.</i> HARDWARE IMPLEMENTATION OF FAST FOURIER TRANSFORM ALGORITHM WITH DESIRED PROPERTIES IN RESIDUE NUMBER SYSTEM	119
<i>Ivanitskiy A., Urusov A.</i> THE NUMERICAL ANALYSES OF THE POINTWISE RESIDUAL METHOD.....	127
<i>Mikishanina E.</i> COMPUTER SIMULATION OF PLANAR SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF FILTRATION THEORY	145
<i>Novozhilova N., Fedotov V.</i> NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR POINTS	153
<i>Slavutskaya E., Abrukov V., Slavutskii L.</i> NEURAL NETWORK SYSTEMS ANALYSIS OF THE SPLIT-LEVEL PSYCHOLOGICAL CHARACTERISTICS.....	164
<i>Fedotov V., Novozhilova N.</i> HIGH-ACCURACY METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS	174
<i>Shelemetyev A., Shelemetyeva Ya., Smirnov A.</i> RESEARCH OF INFLUENCE OF SUSPENSION TRAVEL ON THE PRINCIPLE AND CONTROL OF WHEELED VEHICLES, BASED ON THE SPEED DIFFERENCE BETWEEN STEERING WHEELS.....	185
RULES FOR THE AUTHORS	194

ВЕСТНИК ЧУВАШСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Технические науки

№ 1 2016

Редактор ***Н.И. Завгородняя***

Технический редактор ***Н.Н. Иванова***

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзоре)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации

ПИ № ФС77-51087 от 04.09.2012 г.

Сдано в набор 11.02.16. Подписано в печать 01.03.16. Выход в свет 14.03.16.
Формат 70×100/16. Бумага писчая. Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 16,13. Уч.-изд. л. 17,28.

Тираж 500 экз. Заказ № 227. Свободная цена.

428015, Чебоксары, Московский просп., 15

Типография Чувашского университета